

# Ruchomy oscylator na moście składanym o pośrednich podporach pływających

## Moving oscillator on the floating bridge



**Waclaw Szczesniak**

Prof. dr inż.

Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl



**Magdalena Ataman**

dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

**Streszczenie:** W artykule omówiono drgania trzyprzęsłowego mostu pontonowego wymuszone przejazdem ze stałą prędkością oscylatora jednomasowego. Przeanalizowano zarówno drgania wymuszone jak i swobodne, kiedy oscylator jest już poza mostem. Rozważano przypadki drgań tłumionych oraz drgania bez uwzględnienia tłumienia. Układ trzech równań opisujących ruch układu most pontonowy-oscylator jednomasowy rozwiązano numerycznie. Wybrane wyniki rozwiązania przedstawiono graficznie na rysunkach

**Słowa kluczowe:** Most pontonowy; Lepko-sprężysty oscylator ruchomy; Drgania wymuszone i swobodne

**Abstract:** The paper deals with vibration analysis of three span floating bridge under moving oscillator. Velocity of the oscillator is constant. Forced and free vibrations of pontoon bridge are discussed. Three equations of motion of the system for each span are solved numerically. Solution of damped vibrations and solution for undamped vibrations are presented. Some results are shown in the Figures.

**Keywords:** Floating bridge; Viscoelastic moving oscillator; Forced and free vibrations

Zagadnienia związane ze statyką i dynamiką mostów pontonowych nie są nowe w bogatej literaturze przedmiotu [1-16]. Mosty pontonowe zaliczane są do konstrukcji prowizorycznych, budowane w określonych celach do zadań specjalnych i mają ograniczony czas eksploatacji. Prędkość pojazdów przemieszczających się po takich obiektach jest na ogół ograniczona do najwyżej kilkunastu km/h.

W niniejszym opracowaniu przeanalizowane zostaną drgania takich konstrukcji wymuszone ruchomym jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym poruszającym się ze stałą prędkością. Trójprzęsłowy most modelujemy układem o dwóch stopniach swobody, oscylator ma dodatkowy sto-

pień swobody. Matematycznie zadanie stanowi układ trzech sprzężonych, różniczkowych równań ruchu, ze względu na zmienną czasową, opisujących drgania dwóch pontonów będących ruchomymi podporami mostu i ruch drgający oscylatora.

### Zagadnienie własne mostu pontonowego

Trójprzęsłowy most pontonowy zamodelowany w uproszczony sposób składa się z trzech sztywnych płyt, każda o masie całkowitej  $m$  i długości  $l$ . Masa każdego z dwóch pontonów, wraz ze współdrzającą wodą, jest równa  $M$ , a pole poziomego przekroju poprzecznego pontonu wynosi  $F$ . W położeniu

równowagi statycznej płyty jezdne mostu są poziome jak na rysunku 1. Gęstość wody oznaczamy przez  $\rho$ . Zadanie ma dwa stopnie swobody, zgodnie z rysunkiem 1 jako współrzędne uogólnione Lagrange'a przyjmujemy dwa przemieszczenia pionowe pontonów  $A$  i  $B$ , oznaczając je odpowiednio  $q_1$  oraz  $q_2$ . W pierwszej kolejności wyznaczmy częstotliwości kołowe drgań własnych mostu oraz określimy postacie jego drgań własnych. Równania ruchu analizowanego mostu można wyprowadzić np. stosując równania ruchu Lagrange'a drugiego rodzaju [12]. Przy założeniu, że siły oporu wody są proporcjonalne do współrzędnych uogólnionych  $q_1$  i  $q_2$ :

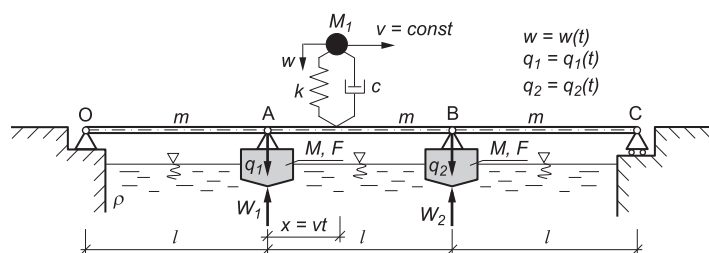
$$W_1 = F\rho g q_1, \quad W_2 = F\rho g q_2, \quad (1)$$

otrzymujemy następujące równania

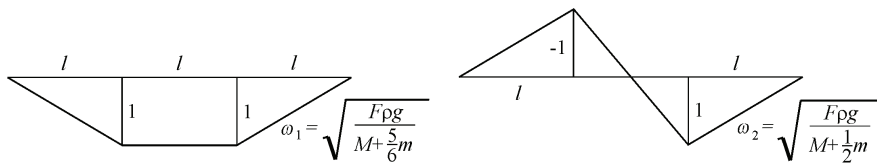
$$\frac{1}{6}(4m + 6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 = 0,$$

$$\frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m + 6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 = 0.$$

(2)



1. Schemat dynamiczny zadania



2. Postacie drgań własnych mostu

Dwie częstości kołowe drgań własnych, wartości własne i wektory własne (postacie drgań - mody) znajdujemy wykorzystując instrukcję programu MATHEMATICA „EigenSystem”, skąd otrzymujemy zależności 3:

Na rysunku 2 pokazano dwie postacie drgań własnych mostu i odpowiadające im częstości kołowe.

### Drgania nietłumione mostu pod ruchomym oscylatorem

W tym punkcie wyznaczmy nietłumione drgania mostu wymuszone przejazdem ruchomego, lepko-sprężystego oscylatora jednomasowego. Przedyskutujemy również drgania swobodne po

zjeździe oscylatora z mostu pontonowego. Prędkość ruchomego oscylatora jest stała i wynosi  $v$ . Mamy do czynienia z układem materialnym o trzech stopniach swobody  $w$ ,  $q_1$  i  $q_2$  (rysunek 1).

Nacisk dynamiczny oscylatora  $N(t)$  na płytę przęsła określamy z równania ruchu oscylatora:

$$N(t) = M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2}. \quad (4)$$

Jeśli przez  $\tilde{w}$  oznaczymy ugięcie płyty jezdni mostu bezpośrednio w punkcie styku oscylatora z płytą, to równanie ruchu oscylatora jest następujące: wg zależności 5.

Ostatecznie równanie ruchu oscylatora w pierwszym przęśle mostu ponto-

nowego ma postać:

$$M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + kw = c \left( \frac{vt}{l} \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{l} v \right) + k \frac{q_1}{l} vt. \quad (6)$$

Równania ruchu swobodnych drgań tłumionych (5) będą zawierały teraz dodatkowo wyrazy od wymuszenia siłą  $N(t)$ . Zatem układ trzech różniczkowych zwyczajnych równań ruchu możemy zapisać w następujący sposób: wg zależności 7.

Układ sprzężonych równań ruchu jest łącznie szóstego rzędu względem czasu. W celu jednoznaczności opisu ruchu należy sformułować sześć warunków początkowych, które w tym przypadku są zerowe:

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \\ \dot{w}(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Jeśli oscylator znajduje się w drugim przęśle **AB**, to równania ruchu są bardziej skomplikowane: wg zależności 9, przy czym ugięcie belki w punkcie styku z oscylatorem jest teraz równe

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= q_1 \frac{l-vt}{l} + q_2 \frac{vt}{l}, \\ \dot{\tilde{w}} &= \dot{q}_1 \frac{l-vt}{l} - q_1 \frac{v}{l} + \dot{q}_2 \frac{vt}{l} + q_2 \frac{v}{l} \end{aligned} \quad (10)$$

Warunki początkowe nie są już zerowe dla układu równań ruchu (9), są one określone przez rozwiązanie układu równań (7) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Jeśli oscylator znajduje się na trzecim przęśle **BC**, to ugięcie pod oscylatorem oraz układ równań ruchu są następujące: wg zależności 11.

Również w trzecim przęśle warunki początkowe nie są zerowe, lecz określone z rozwiązania układu równań (9) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Jeśli oscylator zjeździe z mostu i będzie poruszał się po nieskończonej sztywnym, poziomym podłożu, to równania ruchu mostu są jednorodnymi i opisują drgania swobodne: wg zależności 12.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{5}{6}m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{F\rho g}{M + \frac{1}{2}m}}, \\ \{1, 1\}, \quad \{-1, 1\}, \\ \left\{ \left( M + \frac{5}{6}m \right) + F\rho g \right\}, \quad \left\{ \left( M + \frac{5}{6}m \right) + F\rho g \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + c \left( \frac{dw}{dt} - \frac{d\tilde{w}}{dt} \right) + k(w - \tilde{w}) = 0,$$

$$\frac{d\tilde{w}(vt, t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \Big|_{x=vt} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \Big|_{x=vt}, \quad (5)$$

$$x = vt, \quad \frac{\tilde{w}}{vt} = \frac{q_1}{l} \rightarrow \tilde{w} = \frac{q_1}{l} vt = \frac{q_1}{l} x, \quad \dot{\tilde{w}} = \frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} m \ddot{q}_2 + F\rho g q_1 &= \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{vt}{l}, \\ \frac{1}{6} m \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_2 + F\rho g q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + kw = c \left( \frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v \right) + k \frac{q_1}{l} vt.$$

$$\frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} m \ddot{q}_2 + F\rho g q_1 = \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{l-vt}{l},$$

$$\frac{1}{6} m \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} (4m + 6M) \ddot{q}_2 + F\rho g q_2 = \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{vt}{l}, \quad (9)$$

$$M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + kw = c \left( \dot{q}_1 \frac{l-vt}{l} - q_1 \frac{v}{l} + \dot{q}_2 \frac{vt}{l} + q_2 \frac{v}{l} \right) + k \left( q_1 \frac{l-vt}{l} + q_2 \frac{vt}{l} \right),$$

Warunki początkowe w tym przypadku określa rozwiązanie układu równań (11) w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Mamy zatem komplet równań ruchu mostu, które należy rozwiązać celem określenia ruchu oscylatora  $w$  oraz przemieszczeń pionowych pontonów  $q_1$  i  $q_2$ .

Równania ruchu (7), (9), (10) i (11) rozwiązujemy numerycznie przyjmując następujące dane liczbowe:

$$\begin{aligned} m &= 5000 \text{ kg}, & M &= 2000 \text{ kg}, \\ M_1 &= 1500 \text{ kg}, & k &= 150000 \text{ N/m}, \\ c &= 0,05 c_{kr}, & c_{kr} &= 2 \sqrt{M_1 k}, \\ \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3, & l &= 30 \text{ m}, \\ F &= 5 \text{ m}^2, & v &= 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Przy zadanych wartościach liczbowych zasadnicze wielkości dynamiczne są równe: wg zależności 13.

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{l-vt}{l} q_2, & \dot{\tilde{w}} &= -q_2 \frac{v}{l} + \frac{l-vt}{l} \dot{q}_2, \\ \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 &= 0, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 &= \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{l-vt}{l}, \\ M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + k w &= c \left( -\frac{v}{l} q_2 + \frac{l-vt}{l} \dot{q}_2 \right) + k \frac{l-vt}{l} q_2. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 &= 0, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 &= 0, & M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + k w &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{F g \rho}{M + \frac{5}{6} m}} = 2,82 \text{ s}^{-1}, & \omega_2 &= \sqrt{\frac{F g \rho}{M + \frac{1}{2} g}} = 3,3 \text{ s}^{-1}, \\ q_{st} &= \frac{(m+M+M_1) g}{F g \rho} = 1,7 \text{ m}, & q_{osc} &= \frac{M_1 g}{k} = 0,098 \text{ m}, \\ v_{kr1} &= \frac{\omega_1 l}{\pi} = 26,93 \text{ m/s}, & v_{kr2} &= \frac{\omega_2 l}{\pi} = 31,53 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{q}_2 + F\rho g q_1 + \beta \dot{q}_1 &= \left( M_1 g - M_1 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \frac{vt}{l}, \\ \frac{1}{6}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{6}(4m+6M)\ddot{q}_2 + F\rho g q_2 + \beta \dot{q}_2 &= 0, \\ M_1 \ddot{w} + c \dot{w} + k w &= c \left( \frac{\dot{q}_1}{l} vt + \frac{q_1}{l} v \right) + k \frac{q_1}{l} vt. \end{aligned} \quad (16)$$

Na rysunkach 3-9 pokazano niektóre rezultaty rozwiązania czterech układów równań ruchu mostu (7), (9), (11) i (12). Na wszystkich rysunkach przemieszczenia podano w metrach, prędkości przemieszczeń w metrach na sekundę, a czas w sekundach. Aby otrzymać rzeczywiste wartości przemieszczeń wielkości  $q$  należy podzielić przez ugięcia statyczne pontonów  $q_{st}$ . Należy zwrócić uwagę na efekt zjazdu ruchomego oscylatora z mostu, wywołujący bardzo duże amplitudy drgań swobodnych z uwagi na stosunkowo małą różnicę pomiędzy prędkością  $v$  a pierwszą prędkością krytyczną.

## Drgania tłumione mostu pod ruchomym oscylatorem

W przypadku drgań tłumionych w równaniach ruchu mostu należy uwzględnić dodatkowe siły tłumienia, proporcjonalne do prędkości pontonów  $\dot{q}_1$  i  $\dot{q}_2$ :

$$R_1 = \beta \dot{q}_1, \quad R_2 = \beta \dot{q}_2, \quad (14)$$

$\beta$  jest ułamkiem współczynnika tłumienia krytycznego, który przyjmujemy za stały, czyli tak jak w przypadku układu o jednym stopniu swobody

$$\beta_{kr} = 2 \sqrt{\frac{1}{3} F g (3M + 2m)}. \quad (15)$$

Po uwzględnieniu tłumienia równania ruchu układu most-oscylator, gdy oscylator znajduje się w pierwszym przęśle, mają postać: wg zależności 16.

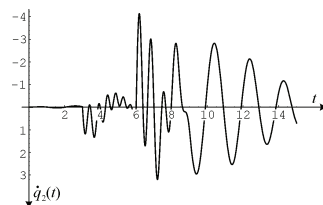
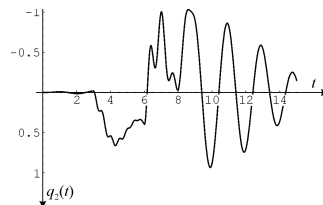
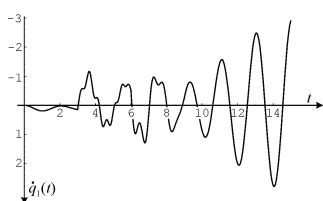
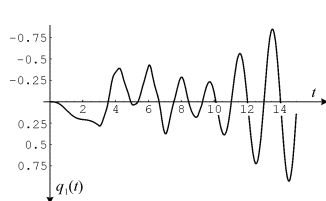
Podobnie należy uwzględnić tłumienie w układach równań (9) i (11), opisujących drgania mostu w przypadku, gdy oscylator znajduje się odpowiednio na drugim i trzecim przęśle. Otrzymane w taki sposób układy równań rozwiązujemy analogicznie do wcześniejszego zadania bez uwzględnienia tłumienia, wykorzystując w każdym przypadku sześć warunków początkowych. Tak jak poprzednio warunki początkowe są zerowe tylko w przypadku, gdy oscylator

znajduje się na pierwszym przęśle, kolejne warunki początkowe wynikają z rozwiązania dla poprzedniego przęsła w chwili  $t = \frac{l}{v}$ .

Na podstawie otrzymanych w ten sposób rozwiązań, przyjmując dane jak w poprzednim przykładzie oraz zakładając dodatkowo  $\beta = 0,1 \beta_{kr}$ , sporządzono wykresy pokazane na rysunkach 7-9.

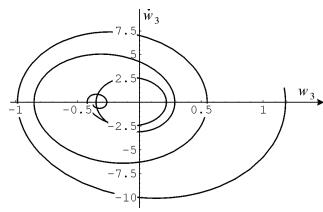
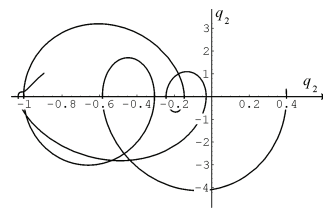
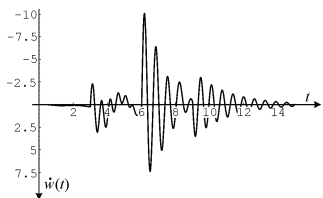
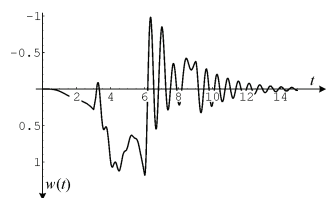
## Wnioski i uogólnienia

W referacie omówiono rozwiązanie dynamiczne trójprzęsłowego mostu pontonowego obciążonego ruchomym, jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym. Prędkość oscylatora jest stała i stosunkowo niska, przyjęto ją równą 10 m/s. Rozważano drgania wymuszone i swobodne, po zjeździe oscylatora z mostu. Liniowy układ trzech równań ruchu rozwiązano numerycznie z zastosowaniem kodu Mathematica. Wyniki rozwiązań równań ruchu pokazano graficznie na rysunkach 4-9. Dalszym etapem studiów dotyczącym zagadnienia dynamiki mostów pontonowych będzie uwzględnienie efektu giętnego przęseł mostowych o skończonej sztywności na zginanie. Będziemy mieli wtedy do czynienia z układem dyskretno ciągłym. Wyniki opracowania



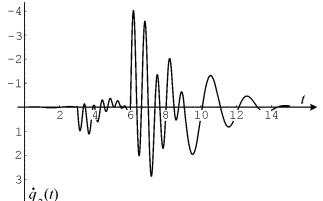
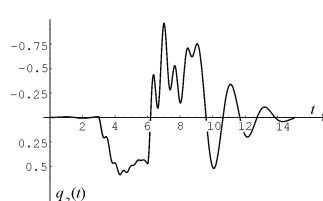
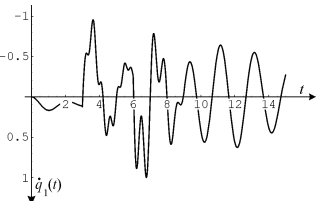
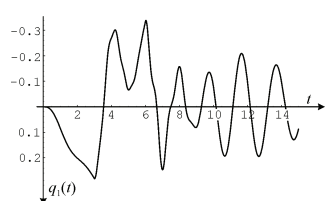
3. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_1(t)$  w [m] i prędkości  $\dot{q}_1(t)$  pontonu A w przypadku braku tłumienia drgań wymuszonych pontonów

4. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_2(t)$  i prędkości  $\dot{q}_2(t)$  pontonu B w przypadku braku tłumienia drgań wymuszonych pontonów



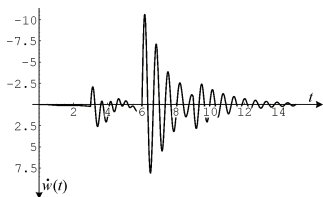
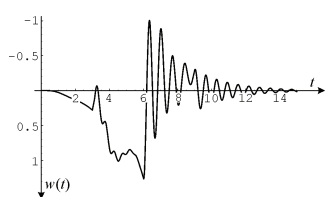
5. Wykres ugięcia  $w(t)$  ruchomego oscylatora oraz wykres pochodnej ugięcia  $\dot{w}(t)$

6. Portrety fazowe współrzędnych  $q_2(t)$  i  $w(t)$ , oscylator znajduje się w trzecim przęśle



7. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_1(t)$  i prędkości  $\dot{q}_1(t)$  pontonu A z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$

8. Wykresy przemieszczenia pionowego  $q_2(t)$  i prędkości  $\dot{q}_2(t)$  pontonu B z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$



9. Wykres ugięcia  $w(t)$  ruchomego oscylatora oraz wykres pochodnej ugięcia  $\dot{w}(t)$  z uwzględnieniem tłumienia drgań pontonów,  $\beta = 0,1\beta_{kr}$

mogą być wykorzystane do testowania obliczeń komputerowych w MES realnych konstrukcji mostów składanych o pośrednich podporach pływających. ◀

## Materiały źródłowe

[1] Białobrzeski T. Mosty składane. WKiŁ, Warszawa 1978.  
 [2] Bursztynowski Z. Mosty składane. Podstawy obliczeń. PWN, Warszawa 1985.  
 [3] Bursztynowski Z. Mosty pływające na oddzielnych podporach. WAT, Warszawa 1988.  
 [4] Osama El-Desouky. I. M. Dynamic Behaviour of Short-Term Floating Bridge. Carleton Institute, Ottawa Canada 2011.

[5] Krasoń W., Derewońko A., Chłus K., Kozłowski R. Analiza wytrzymałościowa odcinka prototypowego mostu pontonowego. Modelowanie Inżynierskie 44, Gliwice 2012, 151-158.  
 [6] Marszałek J. Mosty składane. Projektowanie, badania i eksploatacja. Podręcznik GDDKiA i WAT, Warszawa 2005.  
 [7] Marszałek J., Piechota M. Analiza statyczna wieloprzęsłowych mostów składanych przy różnych warunkach podparcia. Biuletyn WAT, 2013, Vol. LXII, Nr 2, 167-180.  
 [8] Seif M.S., Inoue Y. Dynamic analysis of floating bridges. Marine Structures, 1998, Vol. 11, 29-46.  
 [9] Sterner W. Mosty Warszawy. PWT, Warszawa 1960.  
 [10] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych. OW PW, Warszawa 2007.

[11] Szcześniak W., Ataman M., Zbiak A. Drgania belki sprężystej wywołane ruchomym, liniowym oscylatorem jednomasowym. Drogi i Mosty 2/2002, str. 53-83.  
 [12] Szcześniak W., Ataman M. Analiza dynamiczna mostu pontonowego. Theoretical Foundations of Civil Engineering, 2007, Vol. 15, OWPW, 635-644.  
 [13] Wieczorek M., Krasoń W. Obliczanie mostów pływających modelowanych elementami sztywnymi. Theoretical Foundations of Civil Engineering, Ed. W. Szcześniak, 1999, Vol. 6, OWPW, 357-364.  
 [14] Wu J.S., Lee M.S., Lai T.S. The dynamic analysis of a float plate under a moving load by the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24, 743-762.  
 [15] Wu J.S., Shih P.Y. Moving-load-induced vibration of a moored floating bridge. Computer and Structures, 1998, Vol. 66, No. 4, 435-461.  
 [16] Zhang J., Miao G.P., Liu J.X., Sun W.J. Analytical Models of floating bridges subjected by moving load for different water depths. Journal of Hydrodynamics, 2008, Vol. 20, No. 5, 537-546.