Optymalizacja
w systemach transportu miejskiego

Zdzisław Ferenz, Piotr Kisielewski, Witold Turzański

Optymalizacja jako poszukiwanie ekstremum funkcji celu przy uwzględnieniu ograniczeń zmiennych decyzyjnych jest problemem szeroko rozważanym w licznych rozprawach naukowych i ma istotne, szerokie zastosowania praktyczne w systemach transportowych.

Artykuł jest zmodyfikowaną wersją referatu z konferencji „Zintegrowany system transportu miejskiego z 27 i 28 maja 2010 roku.

Programowanie matematyczne to problem optymalizacyjny postaci:
Maksymalizacja (lub minimalizacja) funkcji
$f(x)=max$
przy warunkach:
1. $g(x) \leq 0$
2. $h(x) = 0$
gdzie: x należy do X, X jest podzbiorem przestrzeni R^n, zaś f, g i h są funkcjami zdefiniowanymi na tym podzbiorze.

Warunki 1. i 2. nazywane są warunkami ograniczającymi, natomiast funkcja *f* to funkcja celu. Rozwiązania tego problemu nazywamy rozwiązaniami optymalnymi.

Klasyczny problem optymalizacyjny przedstawia poniższy przykład, modelu matematycznego programowania liniowego.

Programowanie liniowe to klasa problemów programowania matematycznego, w której wszystkie warunki ograniczające oraz funkcja celu mają postać liniową.

Mamy zmaksymalizować lub zminimalizować liniową funkcję celu:

$$f = \alpha + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Warunki ograniczające mają również liniową postać:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant \alpha$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant \alpha$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha$$

Zmienne x_i *, zwane zmiennymi decyzyjnymi są liczbami rzeczywistymi.*

Oczywiście nie zawsze problem optymalizacyjny ma jakiekolwiek rozwiązanie, być może też żadne rozwiązanie dopuszczalne nie jest optymalne.

Jeszcze zwięźlej ujmuje się to zagadnienie w postaci standardowej, macierzowej, poszukiwania extremum funkcji celu:

$$z(x) = c^Tx \text{ przy ograniczeniach } Ax \leqslant b,\ x \geqslant \Theta$$

gdzie:
$c = (c_j)_{j=1,\ldots,n} \in R^n$, $b = (b_i)_{i=1,\ldots,m} \in R^m$,
$x = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in R^n$, $\Theta = (0,\ldots,0) \in R^n$,
$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n} \in R^{mxn}$

Programowanie liniowe znalazło szerokie zastosowanie w teorii decyzji, np. do optymalizacji planu produkcyjnego. Wiele problemów optymalizacyjnych znajduje rozwiązanie poprzez sprowadzenie ich do postaci problemu programowania liniowego, rozwiązywanego znaną procedurą Symplexu.

O ile definicja matematyczna optymalizacji jest prosta, tak praktyczne wyznaczanie optimum już nie jest. W wielu rzeczywistych problemach transportowych mamy do czynienia z bardzo skomplikowaną funkcją celu, najczęściej nieliniową, dla której wyszukanie optimum globalnego lub w zadanym obszarze (przestrzeni stanu) nie jest łatwe.

Praktyczne problemy optymalizacji w systemach transportowych

Najczęściej rzeczywisty problem transportowy nie może być rozważany w zawężeniu do doboru i analizy formalnego modelu matematycznego w postaci funkcji kryterialnej (celu) i zestawu równań lub nierówności stanowiących warunki ograniczeń.

W praktyce inżynierskiej/transportowej rozwiązanie problemu optymalizacyjnego składa się z następującego scenariusza, zwanego „scenariuszem optymalizacji”:
- Etap 1. Zbudowanie matematycznego modelu systemu,
- Etap 2. Przyjecie ograniczeń zadania określających obszar zmiennych decyzyjnych,
- Etap 3. Przyjęcie funkcji celu (jednej lub kilku),
- Etap 4. Przygotowanie danych (bazy danych) do optymalizacji – „Pre-processing”,
- Etap 5. Dobór lub opracowanie nowego algorytmu matematycznego poszukiwania rozwiązania optymalnego dla przygotowanych danych,
- Etap 6. Przetworzenie i opracowanie wyników optymalizacji do zastosowania inżynierskiego w praktyce – „Post-processing”.

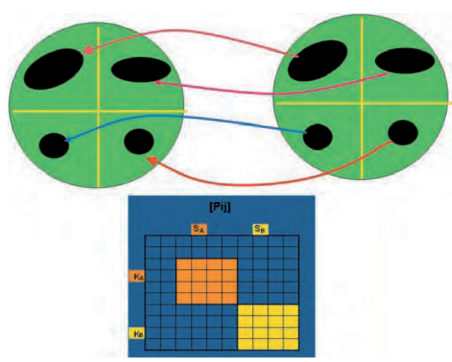
Często popełnianym błędem w dążeniu do osiągnięcia dobrego modelu matematycznego jest brak przygotowania danych do analizy optymalizacyjnej. Typowe błędy tego etapu to:
- zły wybór zmiennych decyzyjnych,
- brak normalizacji zmiennych,
- błędnie określony zakres zmiennych,
- błędny dopuszczalny obszar zmiennych,
- nieuwzględnienie brzegu obszaru.

Wybór zmiennych decyzyjnych

Zły wybór zmiennych decyzyjnych może prowadzić do próby rozwiązywania trudnego zagadnienia prymalnego (pierwotnego), podczas gdy zamiana zmiennych może prowadzić do łatwo rozwiązywalnego tzw. zagadnienia dualnego.

Partycjonowanie zbioru danych

Często model matematyczny lub jego parametry powinny być dobrane odmiennie w ramach rozpatrywanego zbioru danych, co prowadzi do potrzeby partycjonowania zbioru danych. Partycjonowanie zbioru danych – – pomimo pozornej komplikacji analizy, może prowadzić do znacznie lepszych wyników, a w wielu przypadkach jest koniecznym elementem osiągnięcia właściwego rozwiązania inżynierskiego.



1. *Partycjonowanie zbioru danych, macierzy parametrów i zmiennych decyzyjnych*

Optymalizacja wielo-kryterialna

W praktyce często występuje konieczność uwzględnienia wielu kryteriów, co w teorii prowadzi do rozwiązania problemu optymalizacji wielokryterialnej.

Dobór wag kryteriów optymalizacji wielokryterialnej może stanowić kluczowy problem w doborze danych wejściowych procesu. Wagi mogą prowadzić do akceptowalnego rozwiązania inżynierskiego albo teoretycznego punktu optimum leżącego poza obszarem możliwych realizacji praktycznych.

Opracowanie wyników optymalizacji

Podobnie wyniki optymalizacji dla przyjętego modelu najczęściej wymagają odpowiedniego opracowania i przetworzenia (post-processing), aby były przydatne i możliwe do zastosowania w praktyce inżynierskiej.

Optimum globalne najczęściej nie jest znane. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych technicznie jest często liczny, a jego liczebność może być nieznana.

Otrzymane rozwiązanie – wartość funkcji kryterialnej jak i zmienne decyzyjne w ekstremum mogą być trudne do oceny. Często wymagane jest przetworzenie danych wyjściowych, dla otrzymania czytelnych wskaźników inżynierskich, umożliwiających podjęcie ostatecznej decyzji, o akceptacji rozwiązania lub konieczności kontynuacji poszukiwań.

Czytelność przetworzonych wskaźników ma kluczowe znaczenie w systemach decyzyjnych czasu rzeczywistego, gdy decyzje muszą być podejmowane przez decydenta z minimalnym opóźnieniem np. systemy dyspozytorskie.

Najtrudniejsze zagadnienia optymalizacyjne w komunikacji miejskiej

Najtrudniejsze praktyczne problemy optymalizacyjne w systemach transportu miejskiego stanowią:

- optymalizacja rozkładu jazdy komunikacji miejskiej,
- optymalizacja przydziału zadań transportowych dla kierowców i pojazdów w planowaniu długookresowym (harmonogramowanie prac),
- optymalizacja decyzji dyspozytorskich dla doraźnych zmian planu.

Z uwagi na statyczne zmiany rozkładu jazdy oraz historyczną znajomość uwarunkowań i dotychczasowych rozwiązań, problem optymalizacji rozkładów jazdy komunikacji miejskiej nie stanowi praktycznie poważnego problemu ekonomicznego dla systemów komunikacyjnych w dużych miastach.

Poważnym problemem dla przedsiębiorstw komunikacji miejskiej, o dużym ciężarze ekonomicznym, pozostaje harmonogramowanie zadań kierowców (grafik służb), spowodowane liczebnością zbioru oraz liczba uwarunkowań prawnych, technicznych i organizacyjnych.

Problem optymalizacji harmonogramów, nierozwiązany dotąd w większości miast w kraju, udało się z sukcesem rozwiązać i wdrożyć w MPK we Wrocławiu.

Problem optymalnego przydziału (harmonogramu)

Problem przydziału kierowców i pojazdów do realizowanych przez dużą flotę zadań transportowych stanowi podstawę logistyki i efektywnej pracy przedsiębiorstwa transportowego. Powyższe zagadnienie stanowi istotny problem dla wszystkich przedsiębiorstw operujących liczebną flotą pojazdów, jak przedsiębiorstwa komunikacji miejskiej.

Zagadnienie optymalnego harmonogramu można zaprezentować na przykładzie przydziału kierowców do zadań transportowych.

Każdy przydział elementu zbioru A np. kierowcy do elementu zbioru B np. zadania transportowego obarczony jest określonym, zdefiniowanych kosztem (lub zyskiem). Jeśli oba zbiory A i B są równoliczne, zdefiniowana jest kwadratowa macierz kosztów.

W praktyce pokrywane zbiory są różnej mocy, a relacje przydziału niejednoznaczne tj. jeden–do–wielu.

Analizowanym problemem jest tworzenie optymalnego harmonogramu przydziału zadań transportowych (zwanych również służbami) do kierowców/operatorów pojazdów. Tworząc harmonogram napotyka się na szereg trudności, które sprawiają, że wiele znanych algorytmów staje się bezużytecznych. Podstawowym uwarunkowaniem jest duża skala liczebności zmiennych decyzyjnych i relacji w problemie optymalizacji. Powszechnie spotykane w praktyce problemy dotyczą baz danych kilkuset kierowców i przypisywanych im służb dziennie. Zwykle optymalizowane są harmonogramy miesięczne, zatem ilość danych do przetworzenia jest bardzo duża. Kolejnym utrudnieniem jest zwykle znaczna ilość ograniczeń (zarówno zaporowych jak i uwzględnianych w funkcji kosztu), a także relacje pomiędzy przypisaniami w kolejnych dniach, które sprawiają, że niewielka modyfikacja w jednym miejscu pociąga za sobą zmianę warunków w pozostałych.

Jako składniki w funkcji kosztu musi uwzględniać się takie czynniki jak: nadgodziny i podgodziny w okresie rozliczeniowym, preferencje indywidualne i grupowe, prawidłowość zmian, uprawnienia indywidualne i grupowe i wiele innych. Składniki kosztu występują z odpowiednimi wagami charakterystycznymi dla ekonomiki przedsiębiorstwa.

W warunkach ograniczających uwzględnia się przepisy prawa pracy, ustaw o czasie pracy kierowców i wewnętrzne regulaminy przedsiębiorstwa.

Rozwiązanie optymalizacji harmonogramów

Rozwiązanie optymalizacji harmonogramów dla miejskiego przedsiębiorstwa komunikacyjnego we Wrocławiu poszukiwano w oparciu o program OptiGraf® z modułem optymalizacyjnym.

Moduł optymalizacyjny programu OptiGraf posiada zaimplementowane trzy niezależne algorytmy optymalizacyjne harmonogramów:

- algorytm deterministyczny (HLN)
- algorytm probabilistyczny (GRIT)
- algorytm ewolucyjny (AG).

Algorytm ewolucyjny jest algorytmem sztucznej inteligencji opracowanym w oparciu klasyczny mechanizm metod genetycznych. Algorytmy ewolucyjne są wzorowaną na naturalnej ewolucji metodą rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. Są to niedeterministyczne procedury przeszukiwania oparte na mechanizmach doboru naturalnego dziedziczenia i rzadko występujących mutacji.

Tab. 1. Przykład harmonogramu

	Dzień 1 [D1]	Dzień 2 [D2]	Dzień 3 [D3]	Dzień 4 [D4]
Kierowca 1 [K1]	Służba 1 [S1]	Służba 2 [S2]	Służba 4 [S4]	Służba 3 [S3]
Kierowca 2 [K2]	Służba 3 [S3]	Służba 1 [S1]	Służba 2 [S2]	Służba 4 [S4]
Kierowca 3 [K3]	Służba 2 [S2]	Służba 4 [S4]	Służba 3 [S3]	Służba 1 [S1]

Analizie porównawczej poddano wyniki trzech różnych algorytmów optymalizacyjnych uzyskanych dla rzeczywistych bazach danych z przedsiębiorstw komunikacyjnych. Wszystkie opracowane algorytmy korzystają ze identycznej funkcji celu/kosztu, która pozwala na ocenę jakości danego harmonogramu. Ocena polega to na wartościowaniu wszystkich dokonanych przypisań, a następnie sumowaniu tych wartości.

Całkowity koszt harmonogramu jest sumą kosztu wszystkich przypisań służb s_i do kierowców k_j w całym harmonogramie:

$$PSUM = \sum_{i=1}^{n} P_i(s_i, k_j)$$

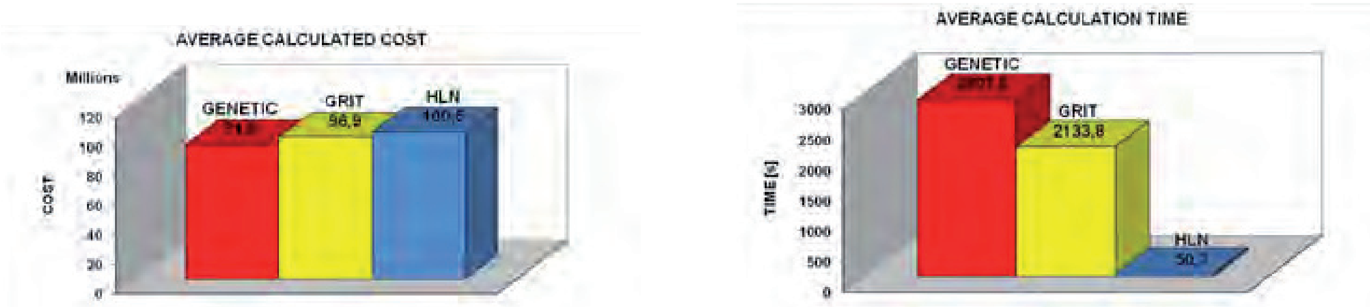
Koszt ten podlega minimalizacji z ograniczeniami.

Wyniki testów porównawczych

Przeprowadzone testy miały na celu porównanie wyników działania algorytmów HLN, GRIT oraz AG na rzeczywistych bazach danych z komunikacji miejskiej. W każdym z poniższych porównań analizowany jest koszt uzyskanego harmonogramu oraz czas obliczeń. Wyniki przedstawione na wykresach są uśrednionymi wartościami z 6 niezależnych wywołań każdego algorytmu.

• Test 1 – urban transportation of the city, Poland
Monthly schedule
Working day – 177 tasks, Saturday – 102 tasks, holiday – 79 tasks, 229 drivers.

• Test 2 – urban transportation of the city, Poland
Monthly schedule
Working day – 179 tasks, Saturday – 120 tasks,



***2.** Wyniki testów (średnia z 6) dla harmonogramu miesięcznego*

***3.** Wyniki testów (średnia z 6) dla harmonogramu miesięcznego*

***4.** Wyniki testów (średnia z 6) dla harmonogramu tygodniowego*

holiday – 80 tasks, 229 driver
• Test 3 – urban transportation of the city, Poland
Weekly schedule
Working day– 179 tasks, Saturday – 120 tasks, holiday – 80 tasks, 229 drivers

Podsumowanie

Przeprowadzone testy nie pozwalają na jednoznaczne stwierdzenie wyższości jednego algorytmu optymalizacyjnego nad pozostałymi. Testy wykazały znaczną wrażliwość każdej z opracowanych metod na różnice w danych wejściowych.

W przypadku wyliczania harmonogramów miesięcznych najlepsze wyniki kosztu uzyskano oparciu o algorytm ewolucyjny AG. Dla harmonogramów tygodniowych lepszą metodą w sensie kosztu okazał się algorytm probabilistyczny GRIT.

Algorytm ewolucyjny ma typowe własności „adaptacyjne”, dostosowujące się do zbioru danych wejściowych i pozwalające na odnalezienie rozwiązania „nietypowego”, nieosiągalnego deterministycznym algorytmem HLN.

Wadą algorytmu genetycznego jest niewątpliwie długi czas obliczeń.

We wszystkich przeprowadzonych testach różnice w funkcji kosztu harmonogramu dla przedstawionych algorytmów nie przekraczają 10%, co świadczy o dobrej zbieżności zaimplementowanych w systemie algorytmów.

Wyniki testów dla różnych baz danych pozwalają na pozytywną ocenę przedstawionych algorytmów w praktycznych zastosowaniach inżynierskich. Testowany system OptiGraf® wdrożono z sukcesem w optymalizacji systemu planowania i dyspozycji komunikacji miejskiej we Wrocławiu, Białymstoku, Radomiu, Gdyni, Warszawie i innych miastach Polski. Wymienione wdrożenia są przykładem dobrej współpracy środowisk naukowych, przemysłu branży IT i komunikacji miejskiej w Polsce.◀

Zdzisław Ferenz - MPK Wrocław

Piotr Kisielewski - Politechnika Krakowska, DPK System Consulting

Witold Turzański - MPK Wrocław