# Odpowiedzi krótkich belek mostowych na przejazd pociągów szybkobieżnych

## Response of short span bridges under mooving high-speed train



Monika Podwórna

Dr inż.

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądiowego i Wodnego

monika.podworna@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono porównanie odpowiedzi dynamicznych mostów o różnych charakterystykach dynamicznych na quasi-rzeczywiste obciążenie ruchome. Poddano analizie różne układy most – tor – pociąg poruszający się z dużą prędkością. Układ jest jednotorowy z nawierzchnią kolejową podsypkową. Modelem mostu jest 15 metrowa belka swobodnie podparta o konstrukcji stalowej. Model obciążenia odwzorowuje pociąg Shinkansen. Wyniki porównano z bardzo uproszczonymi modelami obciążeń, jak strumienie sił skupionych, mas skupionych, oscylatorów jednomasowych i oscylatorów dwumasowych.

#### Słowa kluczowe: Krótki most kolejowy swobodnie podparty;Interakcja pojazd – most; Rezonans

**Abstract:** The paper presents a comparison of dynamic responses of bridges with different dynamic characteristics to a quasi-real mobile load. Different bridge – track – train (moving at high speed) systems were analyzed. The system is ballasted monotrack. The model of the bridge is a 15-meter beam simple-supported with a steel structure. The load model is represented by the Shinkansen train. The results are compared with very simplified load models, such as streams of concentrated forces, concentrated masses, one-mass oscillators and two-mass oscillators.

Keywords: Short span simply supported railway bridge; Vehicle-bridge interaction, Resonance

Systemy transportowe odgrywają kluczową rolę w nowoczesnych społeczeństwach. Rozwój gospodarczy zależy od szybkiej i skutecznej mobilności zarówno ludzi, jak i towarów. W tym kontekście, system kolei dużych prędkości (pol. KDP; ang. HSR, High--speed rail) stanowi atrakcyjna alternatywę dla środków transportu drogowego. Szybka kolej stała się ważnym elementem krajowej sieci transportowej, gdyż jest opcją podróży, która podnosi jakość życia i wspiera wzrost gospodarczy. Kolej HSR powstała w drugie połowie XX wieku. W 1964 r został otwarty pionierski system HSR - pierwszy odcinek linii kolejowej (Tokio-Osaka) japońskiego pociągu Shinkansen poruszającego się z prędkością eksploatacyjną 210 km/h. Następnie w 1981 powstała linia kolejowa łącząca Paryż z Lyon, po której poruszał się pociąg TGV z maksymalną prędkością 260 km/h. Do Japonii i Francji dołączy-

ły Włochy w 1981 r., Niemcy w 1988 r. (pociągi ICE), Hiszpania w 1992 r., Belgia w 1997 r., Wielka Brytania i Chiny w 2003 r., Szwajcaria i Korea Południowa w 2004 r., Holandia i Turcja w 2009 r., Austria w 2012 r. oraz Polska w 2015 r. Na podstawie danych zawartych w opracowaniu Unii Europejskiej [19] na rysunku 1 przedstawiono stan obecny oraz linie w budowie systemu kolei dużych prędkości w Europie.

Zgodnie z Dyrektywą Unii Europejskiej [2], linie kolei dużych prędkości obejmują:

- specjalnie wybudowane linie dużych prędkości, przeznaczone generalnie dla prędkości równych lub przekraczających 250 km/h,
- specjalnie zmodernizowane linie dużych prędkości przeznaczone dla prędkości rzędu 200 km/h,
- specjalnie zmodernizowane linie dużych prędkości, posiadające szczególne cechy będące rezul-

tatem uwarunkowań związanych z topografią, rzeźbą terenu i urbanistycznych, na których to liniach prędkość musi być dostosowywana do każdego przypadku. Niniejsza kategoria obejmuje również linie łączące sieci dużych prędkości oraz sieci konwencjonalne, linie przebiegające przez dworce, dostęp do terminali, lokomotywowni itp., z których korzysta tabor dużych prędkości poruszający się z prędkością konwencjonalną.

Konstrukcje mostowe są bardzo istotnymi elementami linii kolei dużych prędkości, służą do przekraczania przeszkód, takich jak rzeki, doliny, istniejące autostrady lub linie kolejowe. W ostatnich dziesięcioleciach, analizy mostów kolejowych były przedmiotem badań wielu inżynierów, ponieważ efekt dynamiczny powodowany przez pociągi przejeżdżające przez

8



1. Długość linii kolei szybkich HSR NETWORK w Europie

most jest jednym z najbardziej istotnych aspektów, które należy wziąć pod uwagę na etapie projektowania [4]. Badania wykazały, że przy prędkościach powyżej 200 km/h mogą pojawiać się nadmierne drgania w wyniku zjawisk rezonansowych, co zostało potwierdzone w przepisach normowych [11]. Przejścia następujących po sobie obciążeń (kolejne naciski osi zestawów kołowych przemieszczające się po moście) mogą wzbudzić konstrukcję mostową i gdy częstość wymuszenia (lub jej krotność) będzie bliska częstości drgań własnych układu (lub jej krotności) może pojawić się zjawisko rezonansu. Może to prowadzić do kilku problemów, a mianowicie do: niestabilności warstwy podsypki, utraty kontaktu między kołem a szyną, zwiększenia uszkodzeń związanych ze zmęczeniem lub nawet komfortu pasażerów. [20] Należy pamietać, że niektóre aspekty nie są jeszcze do końca znane, co sprawia, że projektanci stają przed problemem co z analizą dynamiczną mostów kolejowych – czy nie pojawią się wyższe wartości przyspieszenia niż te uznane za dopuszczalne w normach europejskich [22].

Obecne normy europejskie odzwierciedlają problem nadmiernych drgań poprzez wymóg przeprowadzenia analizy dynamicznej w prawie każdym przypadku, gdy maksymalna prędkość linii przekracza 200 km/h. W stosunku do wcześniejszych Polskich Norm [12, 13], w normach PN--EN [10,11] rozbudowano podejście do zagadnień dynamicznych mostów kolejowych. Dynamiczny charakter obciążenia uwzględniany jest na dwa sposoby:

 poprzez wprowadzenie obliczeń statycznych na zwiększonych, przez współczynnik dynamiczny  $\varphi$ , obciążeniach – podobnie jak we wcześniejszych normach krajowych,

poprzez analizę bezpośrednich procesów deformacji i dystrybucji sił wewnętrznych oraz naprężeń od obciążeń poruszających się z ustalonymi prędkościami na podstawie dynamicznej odpowiedzi układu (analiza czasowa) [26]

Z powodu nieujednoliconych wymagań dotyczących kolei dużych prędkości analizy dynamiczne powinny być przeprowadzane na podstawie norm, literatury technicznej oraz kolejowych standardów technicznych. [27] Obiekt mostowy dopuszczony do użytkowania i eksploatacji przy przejazdach taboru kolejowego z dużymi prędkościami, powinien spełniać wiele warunków. Główne z nich to:

- wymagania stanu granicznego nośności z uwzględnieniem dodatkowych efektów dynamicznych oraz zmęczeniowych wywołanych dużymi prędkościami,
- wymagania stanu granicznego użytkowalności, które zapewnia bezpieczeństwo ruchu oraz odpowiedni komfort jazdy pasażerów,
- wymagania trwałości konstrukcji, unikanie trwałych deformacji,
- wymagania odpowiedniego wyposażenia trasy kolejowej,
- poprawność rozwiązań konstrukcyjnych, zarówno projektowych jak i wykonawczych,
- wymagania ochrony środowiska minimalne zanieczyszczenia oraz hałas,
- wymagania ekonomiczne koszty eksploatacji i konserwacji toru powinny być stosunkowo niskie.

#### Analiza dynamiczna

Historia analizy ruchomych obciążeń w Polsce sięga czasów przedwojennych. Pierwsze pionierskie prace wiążą się z nazwiskiem Aleksandra Wasiutyńskiego. Zastosowanie metod komputerowych do zagadnień obciążeń ruchomych w Polsce wiąże się z nazwiskiem Jana Langera.[24]

W celu analizy dynamicznych efektów mostów kolejowych w wyniku przejazdu pociągu o dużych prędkości można stosować różnego typu metody, m.in.:

- 1. metody analityczne oparte np. na analizie modalnej,
- metody uproszczone, wykorzystujące wprowadzenie wzbudzenia rezonansowego (DER - Decomposition of the Resonance Excitation),
- metody empiryczne opierające się na rzeczywistych przykładach, ograniczając się do kilku typów konstrukcji,
- 4. metody analityczne oparte na interakcji pojazd-konstrukcja mostu.

W metodach czasowych stosuje się różne dokładności matematyczne i fizyczne - wykorzystuje się różne modele teoretyczne odwzorowujące pociąg ruchomy np.

- modele normowe HSLM (ang. High Speed Load Model) A i B,
- siły skupione,
- masy skupione,
- oscylatory jednomasowe,
- lepko-sprężyste oscylatory dwumasowe,
- płaskie zestawy sztywnych tarcz masowych i mas skupionych,
- przestrzenne zestawy tarcz i mas,
- inne.

Oprócz obciążeń deterministycznych, ze względu na losowość drgań, wielu badaczy posługuje się modelowaniem obciążeń stochastycznych - rozpatruje drgania w kategoriach probabilistycznych, a więc wykorzystuje aparat matematyczny z zakresu rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych. [23]

W pracy porównano wyniki dla bel-



2. Przyjęte proste modele obciążeń ruchomych: a) model P; b) model M; c) model M<sub>2</sub>; d) model MM<sub>2</sub> [14]



3. Płaski model obciążeń ruchomych – model MBFS. [17]



4. Przykładowy pociąg Shinkansen, [6]

kowych mostów o rozpiętości 15m otrzymane metodami analitycznymi dla następujących płaskich modeli obciążeń poruszających się ze stałą prędkością:

- 1. strumień sił skupionych [14]- model P, rysunek **2**,
- 2. strumień mas skupionych [14] model M, rysunek **2**,
- 3. strumień oscylatorów jednoma-

sowych [14] - model M<sub>o</sub>, rysunek **2**,

- 4. strumień oscylatorów dwumasowych [14]- model MM<sub>2</sub>, rysunek **2**,
- zestaw dwóch sztywnych tarcz masowych z liniowymi lepkosprężystymi zawieszeniami pierwszego i drugiego stopnia [17] – model MBFS, rysunek 3.

Wyżej wymienione pięć modeli od-

wzorowuje japoński pociąg typu Shinkansen (rysunek **4**) złożony z 8 powtarzalnych pojazdów szynowych, każdy o długości 25 m, o dwóch niezależnych dwuosiowych wózkach jezdnych o rozstawie osiowym 17,5 m. [20]

Piąty model pojazdu (rysunek **3**) jest bardziej złożony od pozostałych składa się z czterech nieresorowanych mas skupionych odwzorowujących zestawy kołowe, z dwóch sztywnych tarcz masowych odwzorowujących ramy wózków jezdnych łącznie z silnikami trakcyjnymi oraz górnej sztywnej tarczy masowej odwzorowującej nadwozie pojazdu. W modelu pojazdu występują cztery liniowe lepkosprężyste zawieszenia pierwszego stopnia oraz dwa zawieszenia stopnia drugiego. Układ ma 6 stopni swobody.

Przyjęto następujące główne założenia:

- model fizyczny układu jest płaski,
- uproszczonym modelem mostu kolejowego jednoprzęsłowego jest swobodnie podparta belka Eulera,
- tłumienie w belce jest typu Langera (model stałego dekrementu) [8],
- oś belki obciążonej statycznie ciężarem własnym jest prostoliniowa,
- tor poza belką jest prostoliniowy i niepodatny,
- szyny są idealnie proste bez nierówności toru,
- układ jest przedziałami liniowy fizycznie i geometrycznie,
- prędkość obciążenia jest stała,
- w chwili t=0 układ jest w równowadze statycznej,
  - rozpatruje się skończony strumień N powtarzalnych elementów ruchomych, w odstępach odwzorowujących rozstaw osiowy wózków jezdnych oraz długość pojazdu (obciążenie cykliczne),
  - uwzględniono jednostronne więzy między kołami pojazdów a szynami (modele MM<sub>a</sub> i MBFS).

W analizie dynamicznej modeli M<sub>o</sub>, MM<sub>o</sub>, MBFS wprowadzono siły interakcji (rysunek **5**) pomiędzy skupionymi elementami ruchomymi a belką mostową (ang. VBI - the vehicle-bridge interaction).

przegląd komunikacyjny

Równania ruchu sformułowano w niejawnej postaci, oddzielnie dla belki oraz obciążenia ruchomego. Zastosowano równania Lagrange'a II rodzaju dla belki oraz zasadę d'Alembert'a dla obciążenia ruchomego. Otrzymano macierzowe równania ruchu podukładów należące do klasy równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych, o stałych współczynnikach:

#### $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{R}(t), t] (1)$

gdzie: **B**,**C**,**K** - macierze bezwładności, tłumienia i sztywności, **F**[**R**(t),t] - wektor obciążeń uogólnionych zależny od wektora sił interakcji **R**(t) i zmiennej czasowej t.

Macierzowe równania ruchu układu sformułowano częściowo w niejawnej postaci. Następnie scałkowano je numerycznie za pomocą metody średniego przyspieszenia Newmarka z parametrami  $\beta_N$ =1/4,  $\gamma_N$ =1/2, rozwiniętej do niejawnej postaci [14]. Przeprowadzono analizę drgań giętnych w płaszczyźnie pionowej mostów.

W wyniku analizy dynamicznej otrzymano następujące wnioski:

- Modele P i M nie uwzględniają resorowania – brak interakcji układu pojazd – konstrukcja.
- Model M jest oceniany jako najmniej korzystny gdyż wykazuje duże różnice, zarówno jakościowe, jak i ilościowe, w porównaniu z innymi modelami.
- Modele P i M<sub>o</sub> są bliskie rzeczywistości, ale w stanach rezonansowych mogą występować zaburzenia wyników.
- W zakresie uproszczonych modeli pociągów model MM<sub>o</sub> jest najbardziej zbliżony do rzeczywistości
- 5. Modelowanie szybkich pojazdów



5. Modele belki i obciążenia ruchomego:
a) konfiguracja układu w chwili początkowej,
b) ugięcie dynamiczne belki w(x,t) oraz położenie siły interakcji R<sub>i</sub> (t)

11/2019



6. Przykładowy układ uwzględniający odkształcalność stref dojazdowych – skala skażona [15]

Zakończenie

szynowych wymaga uwzględnienia w komplecie mas nieresorowanych, mas resorowanych oraz zawieszeń lepkosprężystych. Model MM<sub>o</sub> mający te cechy jest raczej zbyt uproszczony. Sugeruje się, aby modelować osobno zestawy kołowe, resorowane ramy wózków jezdnych, resorowane nadwozie pojazdu i zawiesia lepkosprężyste pierwszego i drugiego rzędu, np. model MBFS.

 W przypadku powtarzalnych pojazdów szynowych mogą występować stany rezonansowe, dlatego w symulacjach dynamicznych należy wziąć pod uwagę całkowitą liczbę pojazdów oraz współczynniki tłumienia.

W żadnym z powyższych modeli nie uwzględniono odkształcalność toru w strefach dojazdowych do mostu. W pracach [15, 18], gdzie przyjęto dużo bardziej złożony układ (rysunek 6) most – tor – pociąg ruchomy (BTT system), został udowodniony ogromny wpływ tego elementu na analizę mostu jako oddziaływania pod wpływem pociągów poruszających się z dużymi prędkościami. Przedstawione wyniki analizy w pracy [1] potwierdzają, że należy uwzględnić "nierówność progową toru" spowodowaną nagłą zmianą sztywności podtorza.

#### Modele o stałym obciążeniu ruchomym są szeroko stosowane w dynamicznej analizie mostów kolejowych. Jednak użycie tego prostego modelu może przeszacować odpowiedź rezonansową mostu o schemacie belki swobodnie podpartej, jeśli efekty interakcji pojazd - most (ang. VBI - the vehicle-bridge interaction) są pomijane, szczególnie w przypadku krótkich rozpiętości. [25] Aby uwzględnić efekty VBI, Eurokod 1 [11] umożliwia inżynierom rozważenie dodatkowego tłumienia konstrukcyjnego, które zależy od rozpiętości mostu. Ta metoda jest tak zwaną dodatkową metodą tłumienia (ang. ADM - Additional Damping Method), została sformułowana w celu uwzględnienia wpływu prognozowanej interakcji. Należy wziąć pod uwagę, że metoda dodatkowego tłumienia może czasami powodować niebezpieczną prognozę odpowiedzi konstrukcji. [25].

W pracy [5] przedstawiającej analizę teoretyczną oraz doświadczalną mostu o rozpiętości przęsła 15,25 m, autorzy przyznali, że modele numeryczne przeszacowują maksymalne przyspieszenia konstrukcji mostowej. Twierdzą, że prawdopodobnie jest to spowodowane brakiem uwzględnienia interakcji pojazd - konstrukcja, które są najbardziej istotne w rezonansie. Takie sytuacje rzadziej zdarzają się w mostach średnich bądź długich. [5]

Mosty kolejowe o małych rozpiętościach wydają sią bardziej problematyczne [21]. Obserwuje się, że zjawisko rezonansu występuje częściej w krótkich mostach [3, 9]. Należy zaznaczyć, że na dynamiczne zachowanie wpływają nie tylko właściwości konstrukcyjne mostu, ale także właściwości dynamiczne toru, a mianowicie podsypka i szyna oraz dynamiczne właściwości pojazdu, szczególnie w mostach o małych rozpiętościach. Te aspekty skutkują szczególnie trudnymi do przewidzenia odpowiedziami dynamicznymi na etapie projektowania tego typu konstrukcji [22].

Dynamiczna analiza konstrukcji mostowych jest konieczna w przypadku pojawienia się rezonansu, czyli niebezpiecznego zjawiska, które może występować w wyniku dużych prędkości i regularnie rozmieszczonych grup osi pociągów (cykliczność obciążenia). Jeżeli jeszcze dodatkowo występują nierówności toru to nadmierne drgania płyty mostowej mogą powodować utratę kontaktu koło-szyna, destabilizację podsypki, występowanie pęknięć i kruszeń betonu oraz przekroczenie granic naprężeń konstrukcji mostu. Efekty dynamiczne, w tym zjawisko rezonansu, zawsze muszą być brane pod uwagę, gdy analizowany jest most kolejowy po którym mogą poruszać się pociągi dużych prędkości. W przypadku cyklicznego strumienia sił ruchomych w belce mogą wystąpić stany rezonansów siłowych. ৰ

#### Materiały źródłowe

12

- [1] Bryja D., Popiołek A., Analiza drgań pojazdów kolejowych w trakcie ich przejazdu przez nierówność progową toru, Przegląd komunikacyjny, 9,2018, 68-72.
- [2] Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2008/57/WE z dnia 17 czerwca 2008 r. w sprawie interoperacyjności systemu kolei we Wspólnocie (przekształcenie) - Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej L 191/1.
- [3] ERRI D-214/RP 9. Rail bridges for speeds >200 km/h. Final report. Utrecht: European Rail Research

Institute (ERRI); 1999.

- [4] Fryba L., Dynamics of railway bridges. Academia, Praha, 1996.
- [5] Galvin P., Romero A., Moliner E., Martinez-Rodrigo M.D., Two FE models to analyse the dynamic response of short span simplysupported oblique high-speed railway bridges: Comparison and experimental validation, Engineering Structures, 167, 2018, 48-64
- [6] http://www.ns.szybkiekoleje.org. pl/, 2019-08-22
- [7] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi, WNT, Warszawa 2005.
- [8] Langer J., Dynamika budowli, WPWr, Wrocław 1980.
- [9] Museros P, Romero ML, Poy A, Alarcon E., Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines, Computers & Structures, 80, 2002, 212 1-32
- [10] PN-EN 1990-Eurocode 0 Podstawy projektowania konstrukcji, 2004.
- [11] PN-EN 1991-2 Eurocode 1 Oddziaływania na konstrukcje. Część2. Obciążenia ruchome mostów; 2007.
- [12]PN-66/B-02015. Mosty, wiadukty i przepusty – obciążenia i oddziaływania.
- [13]PN-85/S-10030. Obiekty mostowe. Obciążenia.
- [14] Podwórna M., Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part 1 – Modelling and numerical integration, Structural Engineering & Mechanics 38, 3, 2011, 283 – 300.
- [15]Podwórna M., Dynamic response of steel-concrete composite bridges loaded by high-speed train, Structural Engineering & Mechanics, 62, 2, 2017, 179-196.
- [16]Podwórna M., Współczynniki dynamiczne ugięć pionowych w analizie numerycznej belkowych mostów kolejowych, Przegląd Komunikacyjny, 9,2017, 7-11.
- [17] Podwórna M., Vertical vibrations of steel beam bridges induced by trains moving at high speeds. Part 1 – theory, Archives of Civil Engineering, 51, 2, 2005, 179-209.

[18]Podwórna M., Klasztorny M., Verti-

cal vibrations of composite bridge / track structure / high-speed train systems. Part 3: Deterministic and Random Vibrations of Exemplary System, Bulletin of the Polish Academy of Sciences / Technical Sciences 62, 2, 2014, 305-320.

- [19] Raport Unii Europejskiej EU transport in figures 2018.
- [20] Rebelo C. Simoes da Silva L. Rigueiro C. Pircher M., Dynamic behaviour of twin single-span ballasted railway viaducts - field measurements and modal identification. J Engineering Structures 30, 2008, 2460-9.
- [21] Rocha J.M., Henriques A.A., Calçada R., Probabilistic safety assessment of a short span high-speed railway bridge, Engineering Structures 71, 2014, 99–111.
- [22] Rocha J.M., Henriques A.A., Calcada R., Safety assessment of a short span railway bridge for high-speed traffic using simulation techniques Engineering Structures 40, 2012, 141 – 154.
- [23] Śniady P., Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji, Wrocław, Oficyna Wydawnicza PWr ,2000.
- [24] Szcześniak W., Ataman M., Przegląd publikacji polskich autorów z zakresu obciążeń ruchomych na konstrukcjach inżynierskich, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, 226, 12, 2018, 667-674.
- [25] Yau J.D., Martínez-Rodrigo M.D., Doménech A., An equivalent additional damping approach to assess vehicle-bridge interaction for train-induced vibration of short--span railway, Bridges Engineering Structures, 188, 2019, 469–479.
- [26] Zbiciak A., Oleszek R., Michalczyk R., Dynamic of an orthotropic railway bridge in the light of european standards, Archives of Civil Engineering LXII, 2, 2016, s.265-282
- [27]Zobel H., Mossakowski P., Oleszek R. Analiza statyczna i dynamiczna mostu kolejowego nad rzeką Czarna w ciągu CMK. Inżynieria i Budownictwo 7-8/2013, 429-435.

## Układy dynamiczne w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich

# Dynamic systems for the analysis of the behavior of geosynthetics in railway engineering structures

Dı



#### Eligiusz Mieloszyk

Prof. Dr hab. inż. Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska



#### Anita Milewska

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska



Sławomir Grulkowski

Dr inż.

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

slawi@pg.edu.pl

**Streszczenie:** W analizie współpracy geosyntetyków z elementami konstrukcji inżynierskiej możemy je traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. Modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka i jego elementów, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany zostanie model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony w postaci uogólnionego układu dynamicznego. W tym opisie wykorzystuje się różne operatory. Prowadzą one do układów ciągłych o parametrach rozłożonych. Rozpoczynając od opisu z wykorzystaniem układów dynamicznych ciągłych można przejść do układów dynamicznych dyskretnych. Pozwala na to teoria uogólnionych układów dynamicznych, poprzez wykorzystanie innych operatorów. Takie podejście umożliwia prowadzenie analizy problemu z wykorzystaniem sygnałów ciągłych i dyskretnych. Otrzymane wyniki pozwalają też wyznaczać odpowiedzi analizowanych układów metodami analitycznymi, numerycznymi lub hybrydowymi.

#### Słowa kluczowe: Geosyntetyki; Układy dynamiczne; Nieklasyczny rachunek operatorów

**Abstract:** While interacting with the elements of the engineering structures, geosynthetics can be treated as elastic membranes or shells placed on different types of foundation. Modeling of the real system takes into account the most important properties of the system and its elements. We will develop a physical and mathematical model in a form of generalized dynamic system. The mathematical description will use different operators leading to a continuous distributed system. The modeling will be further modified by development of discrete dynamic systems, which is enabled by the theory of generalized dynamic systems. This approach allows for the analysis of the problem with continuous and discrete signals. The results will show the response of the analyzed systems with analytic, numerical or hybrid methods.

#### Keywords: Geosynthetics; Dynamic systems; Non-classical operational calculus

Do opisu (modelowania) wielu układów fizycznych, mechanicznych wykorzystywane są układy dynamiczne ciągłe i dyskretne o parametrach skupionych i rozłożonych, stacjonarne i niestacjonarne. Szerokie możliwości tej teorii, a przede wszystkim teorii uogólnionych układów dynamicznych pozwalają zastosować je w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich poprzez wykorzystanie specjalnych operacji różniczkowych lub różnicowych oraz odpowiedniego kształtu endomorfizmów [13]. Wszystkie te zabiegi, co istotne, mają matematyczne uzasadnienie i w związku z tym ich zastosowanie jest uprawnione, o czym przekonamy się dalej. Geosyntetyki, czyli geowłókniny, geotkaniny, geosiatki, geomembrany, geowykładziny itp. są powszechnie stosowane w budownictwie, w tym przy budowie, modernizacji i remontach linii kolejowych zgodnie z wytycznymi zawartymi między innymi w [17]. Dobrze zbudowana droga szynowa to droga nie podlegająca przypadkowym, niekontrolowanym odkształceniom. Zwiększenie nośności poszczególnych warstw gruntu tworzących budowlę ziemną ma szczególne znaczenie w budowie dróg kolejowych.

Wspólną cechą geotekstyliów, geotkanin i geomembran jest brak sztywności na zginanie. Ich właściwości mechaniczne zależą od sposobu wykonania, użytych materiałów oraz sposobów zakotwienia. Często zastosowane geosyntetyki w budowli mają wielowarstwowe ułożenie (rys. 1).

Takie wielowarstwowe stosowanie geosyntetyków jest korzystne. Świadczą o tym badania przeprowadzone w aparacie trójosiowego ścinania próbek gruntu (rys. **2**).

W przekroju drogi kolejowej ta wielowarstwowość przedstawiona jest na rys. **3**. Z powyższego wynika, ze każda kolejna warstwa posiada inne warunki obciążenia i współpracy. Zilustrowano to schematycznie na rys. **4**.

#### Charakter analogowy analizowanego problemu

W wielu przypadkach w analizie współpracy geosyntetyków z podłożem i elementami konstrukcji inżynierskiej (np. z podtorzem) możemy



1. Wielowarstwowe ułożenie geosyntetyków w nasypie



 Charakterystyka wyników testu przeprowadzonego w aparacie trójosiowego ścinania dla próbek gruntu o różnych zawartościach geosyntetyku opracowany na podstawie [5] przy σ, = 100 kPa



3. Przykładowy schemat ułożenia geosyntetyków w przekroju drogi kolejowej [11]



4. Przykładowy schemat obciążeń (obciążeń zastępczych) warstw drogi kolejowej [11]

wybrane geosyntetyki traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. np. typu Winklera, Eulera, Pasternaka, Kerra, bowiem modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony jest zwykle w postaci szczególnych przypadków uogólnionych układów dynamicznych [13]. W tym szczególnym opisie teoria uogólnionych układów dynamicznych [13] dopuszcza wykorzystanie operatora Laplace'a  $\Delta$ , a dalej z jego pomocą operatora d'Alemberta 🗆 Podobnie jak płyta na podłożu gruntowym (podłożu sprężystym) opisywana jest z wykorzystaniem bilaplasjanu [16].

Analogicznie (w sensie problemów różniczkowych) modeluje się układy płytowe, czy fundamenty [8], fundamenty płytowo - palowe [6,15, 18, 21] dobierając odpowiednie parametry układu z uwzględnieniem parametrów podłoża gruntowego [19]. Na płytach, na fundamentach płytowo – palowych także posadowione są linie kolejowe, linie tramwajowe, rurociągi, drogi startowe. W tych przypadkach także wykorzystuje się geosyntetyki. W [4] autorzy wykorzystują w modelowaniu podłoże sprężyste do oceny wpływu nierównomiernego osiadania dna zbiornika na rozkład sił wewnętrznych w jego dnie. Jest to istotne dla określania awaryjności dużych zbiorników [1]. Takie koncepcje wykorzystuje się przy analizie wzajemnego oddziaływania w układzie pojazd kolejowy tor – podtorze - podłoże gruntowe łącznie z ich eksperymentalną weryfikacją [14], także przez wcześniejsze rozpoznanie podłoża gruntowego np. z wykorzystaniem sondowania [7] i określenie jego parametrów z wykorzystaniem metody CPT bez pomiaru ciśnienia wody w porach gruntu lub metody CPTU z pomiarem ciśnienia wody w porach gruntu. Wyniki sondowania mogą być przedstawione za pomocą odpowiednich wykresów (rys. 5). Na wykresach rejestrowane są: opór na stożku sondy  $q_{z}$ , tarcie na tulei ciernej  $f_{c}$ , ciśnienie wody w porach gruntu u.

W przypadku linii kolejowych wpływ na zachowanie się konstrukcji mają drgania, które są wywołane przez ruch pociągów i zależą między innymi od ich prędkości. Po przekroczeniu prędkości krytycznej drgania tzw. toru i podtorza znacznie zwiększają się i gwałtownie narastają trwałe odkształcenia toru [3]. Decydują o tym rozchodzące się drgania (fale), które są pewnego rodzaju perturbacjami w polu prędkości, przemieszczającymi się w ośrodku przyjmując różne formy i prędkości. Decydujące są tu fale sprężyste. Są to fale mechaniczne, które rozchodzą się w ośrodku sprężystym jakim jest podtorze i dalej przechodzą do otoczenia w wyniku działania sił związanych z odkształceniami objętości i postaci elementów całego





5. Przykładowy wynik badań CPTU w wybranym punkcie (węźle) sondowania [9]

ośrodka. Obiektami zewnętrznymi powodującymi owe odkształcenia są przejeżdżające pojazdy szynowe, które są źródłami fal, a na ich generowanie ma też wpływ geometria i stan toru.

Rozchodzenie się fal sprężystych w podtorzu, w gruncie polega tu na wzbudzaniu cząstek ośrodka coraz bardziej odległych od źródła fal. Fale sprężyste (rys. **6**) można podzielić na fale objętościowe rozchodzące się w gruncie i powietrzu (hałas) oraz fale powierzchniowe rozchodzące się wzdłuż powierzchni rozdzielających ośrodki o różnych właściwościach, w tym fale rozchodzące się na powierzchni gruntu.

Fale objętościowe podłużne P docierają do rejestratora drgań, do odbiornika jako pierwsze. Fale te powodują odchylenie drgania w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fal. Powodują ściskanie i rozciąganie ośrodka i rozchodzą się z prędkością *c*<sub>1</sub>.

Fale objętościowe poprzeczne S docierają ze źródła do rejestratora drgań po fali P i mają prędkość c<sub>s</sub>. Prędkość fal P i S zależy od wielkości parametrów sprężystych ośrodka i wraz ze zmianą tych parametrów prędkości te mogą różnić się znacznie, a szczególnie zmiany te mogą być związane np. ze wzrostem głębokości w gruncie [12].

Fale powierzchniowe: fale Rayleigha R i Love'a L mają długie okresy i zmienne amplitudy, przy czym amplituda ich drgań maleje wykładniczo wraz ze wzrostem głębokości.

Powierzchniowe fale Rayleigha R, których prędkość zależy od ich częstotliwości, rozchodzą się poziomo i wywołują zarówno pionowe, jak i poziome, lecz nie często poprzeczne ruchy powierzchni gruntu (rys. 6). Przy czym pionowe i poziome składowe są przeciwne w fazie tak, że ruch cząstek jest eliptyczny – odbywa się po elipsie zorientowanej pionowo i która jest prostopadła do kierunku biegu fali. Pod wpływem tych drgań ziarna gruntu poruszają się po torach zbliżonych do elips, grunt zaś ulega silnemu rozluźnieniu. Fale Love'a L rozchodzą się również poziomo, przy czym wywołują poprzeczne, poziome ruchy cząstek (rys. **6**).

Z tego wynika, że w wielu przypadkach konieczne jest wzmocnienie podtorza, w tym z wykorzystaniem geosyntetyków. Porównanie skuteczności niektórych wzmocnień podłoża dla linii dużej prędkości przedstawiono np. w [20].

#### **6**. Fale P, S, R, L [12]

#### Uogólnione układy dynamiczne w nieklasycznym rachunku operatorów i ich zastosowanie

Uogólnione układy dynamiczne [13] pojęciowo związane są z nieklasycznym rachunkiem operatorów, który bazuje na trzech liniowych operacjach S, s, T i dwóch przestrzeniach liniowych L<sup>1</sup>, L<sup>0</sup>,. Zakładamy, że L<sup>1</sup>⊂L<sup>0</sup>, S:L<sup>1</sup> $\rightarrow$ L<sup>0</sup>,, T:L<sup>0</sup> $\rightarrow$ L<sup>1</sup>, s:L<sup>1</sup> $\rightarrow$ KerS oraz dodatkowo, że ST = id, TS = id-s. Własności operacji S, T, s i ich różne reprezentacje można znaleźć w [2, 10, 13]. Co istotne: wspomniane operacje moga być definiowane w dziedzinie ciągłej albo dyskretnej i wtedy prowadzą one odpowiednio do opisu z wykorzystaniem równań różniczkowych, różnicowych, bądź ich układów. W związku z tym mogą być wykorzystywane do opisu i analizy uogólnionych układów dynamicznych [13]. Takie podejście prowadzi do uogólnionego wzoru Taylora postaci

$$x = sx + TsSx + T^{2}sS^{2}x + \dots$$
  
...+  $T^{n-1}sS^{n-1}x + T^{n}sS^{n}x$ , (1)  
dzie  $x \in L^{n} \{x \in L^{n-1} : Sx \in L^{n-1}\}$ .

Uwaga! W ostatnim wzorze x nie oznacza współrzędnej punktu, lecz element dowolnej przestrzeni liniowej L<sup>n</sup> zdefiniowanej wcześniej. Pokazuje to ogólność wzoru (1).

#### przegląd komunikacyjny

g

Okazuje się, że do analizy naszego problemu należy przyjąć jako operacie S operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

lub operator d'Alemberta

 $\Box = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 

i dobrać do nich operacje T i s. Uwaga! W przypadku n=2 operator Laplace'a redukuje się do postaci  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , natomiast dla n=1 otrzymujemy tylko operację  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ i to zmienia równanie różniczkowe modelu [11]. W przypadku operacji  $\Box$  (n=3) operacje T i s określone są odpowiednio wzorami

$$T\left\{f\left(P,t\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{Af\left(P_{0},t\right)}{d\left(P,P_{0}\right)} d\Omega\right\},(2)$$

$$s\left\{u\left(P,t\right)\right\} = \left\{\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{1}{d\left(P,P_{0}\right)} A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - Au\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{d\left(P,P_{0}\right)}\right) + \frac{1}{ad\left(P,P_{0}\right)} A\cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial d\left(P,P_{0}\right)}{\partial n}\right] d\sigma\right\}$$
(3)

gdzie:  $L^0 = C^1 (\Omega \times <0,\infty))$ ,  $L^1 = C^3 (\Omega \times <0,\infty))$ , operacja A jest podstawieniem za t wartości  $t - (d (P,P_0)/a)$  i  $a \neq 0$  jest stałą charakteryzującą układ zastępczy

$$d(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

 $\frac{\partial}{\partial n}$  oznacza pochodną normalną,  $\sigma$ jest brzegiem zbioru  $\Omega$ .

W każdej z opisywanych sytuacji modelowaniu matematycznym W występuje równanie różniczkowe cząstkowe  $\Box u = f(x, y, z, t)$ . W naszym przypadku opisuje ono układ zastępczy, w którym stała a charakteryzuje odpowiednio podłoże (podbudowę) z geosyntetykami, natomiast f(x, y, z, z)t) charakteryzuje ciągłe obciążenie zastępcze. Wielkości te, muszą być wyznaczone empirycznie [7, 14, 17], w tym laboratoryjnie z wykorzystaniem aparatu trójosiowego lub aproksymowane przez parametry elementów składowych układu (rys. 3 i 4), które w modelu mogą być traktowane jako połączone szeregowo lub równolegle

i mogą tworzyć zastępczy układ dynamiczny [13].

Oczywiście x, y, z są współrzędnymi punktu  $P \in \Omega$  w chwili t, a u jest funkcją odpowiedniej klasy w zbiorze  $\Omega \times <0,\infty$ ) i oznacza ugięcie (przemieszczenie, zmianę położenia punktów P). W naszym modelu wystarczy, że  $\Omega$  jest graniastosłupem lub szczególności prostopadłościanem o odpowiednich wymiarach. Korzystając ze wzorów (1), (2), (3) możemy zapisać

$$u(x, y, z, t) = u(P, t) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{d(P, P_0)} A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) + \frac{1}{ad(P, P_0)} \right] + \frac{1}{ad(P, P_0)} \cdot A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial d(P, P_0)}{\partial n} \right] d\sigma \right\} +$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \frac{Af(P_0, t)}{d(P_0, t)} d\Omega \right\}$$
(4)

czyli określić wartości funkcji u w leżącym wewnątrz obszaru  $\Omega$  punkcie P w chwili t.

Ze wzoru (4) wynika, że jeżeli  $u_1$  jest odpowiedzią układu swobodnego u = 0, tzn. jest falą sferyczną, natomiast  $u_2$  jest odpowiedzią układu nieswobodnego z wymuszeniem (obciążeniem) f(x,y,z,t), to odpowiedź u tego układu można przedstawić w postaci  $u=u_1+u_2$ . Jeżeli obciążenie zastępcze f $\epsilon Ker^n$ , to zgodnie ze wzorem (1) możemy zapisać:

 $u(P,t) = su + Tsf + T^2s^2f + ... + T^{n-1}s^{n-1}f$ , gdzie T i s są określone odpowiednio wzorami (2) i (3).

Jak pokazano w [11] zmiana położenia punktów analizowanego podłoża, a w tym punktów z geosyntetyków może być szacowana przez fale sferyczne (funkcje sferyczne).

Uwaga! Wykorzystane układy dynamiczne można analizować też w przestrzeni wyników [13], która jest bogatsza w elementy niż przestrzeń wyjściowa.

Własności rozwiązań (4) [11] uprawniają do wykorzystania przedstawionych opisów matematycznych do modelowania zmian położenia punktów analizowanego obszaru Ω, a w szczególności interesujących nas punktów (x, y, g(x, y)) geosyntetyków, gdzie z = g(x, y) jest równaniem powierzchni geosyntetyku, a (x, y) należą do zbioru  $D \subset R^2$ , który jest rzutem  $\Omega$ na płaszczyznę XOY układu współrzędnych i punktów leżących w warstwach położonych dostatecznie blisko powierzchni geosyntetyku.

W celu przeprowadzenia identyfikacji modelu trzeba przeprowadzić badania eksperymentalne wykorzystując eksperyment czynny, bierny lub mieszany i przeprowadzić walidację modelu.

## Dyskretyzacja problemu i układ dynamiczny dyskretny

Niech  $x = i\Delta x; y = j\Delta y; z = k\Delta z; t = l\Delta t$ adzie  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$  so odp

gdzie  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$  są odpowiednio przyrostami zmiennych *x*, *y*, *z*, *t* oraz

$$\begin{split} u_{i,j,k,l} &= u \left( i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, l \Delta t \right), f_{i,j,k,l} = \\ &= u \left( i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, l \Delta t \right) \end{split}$$

Zastępując pochodne cząstkowe ich ilorazami różnicowymi i wprowadzając w przestrzeni czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych operacje

$$S_{1}u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l}$$

$$S_{2}u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l}$$

$$S_{3}u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l}$$

$$S_{4}u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1}$$

albo

$$S_{1}u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_{1}u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_{1}u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l} - u_{i,j,k,l}$$

$$S_{1}u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1} - u_{i,j,k,l}$$

możemy analizowane układy dynamiczne ciągłe zastąpić dyskretnymi układami dynamicznymi o parametrach rozłożonych, które można wykorzystać do badania w dziedzinie czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych lub do numerycznego wyznaczania ich odpowiedzi.

#### Podsumowanie

Przedstawiono metodę analizy problemu z wykorzystaniem nieklasycznego rachunku operatorów i uogólnionych układów dynamicznych.

Ogólnie przyjęty aparat matematyczny pokazuje szerokie możliwości tworzenia jednolitych opisów problemów inżynierskich w różnych dziedzinach: ciągłej i dyskretnej.

Wykorzystując wzór (4) można prowadzić analizę ilościową i jakościową problemu, po przeprowadzeniu identyfikacji, kalibracji i walidacji modelu, najlepiej z wykorzystaniem badań in situ w celu określenia parametrów układu zastępczego.

Wielkości *u(x, y, z, t)* można wyznaczać numerycznie, a także z wykorzystaniem metod hybrydowych na bazie wzoru (4) lub wykorzystując układy dynamiczne dyskretne o parametrach rozłożonych przybliżające dany układ dynamiczny ciągły.

Otrzymane zależności można wykorzystywać do badań symulacyjnych i eksperymentalnych.

Wspomniane modele analogowe można wykorzystywać do określania awaryjności, niezawodności systemów transportowych, ich elementów oraz wykorzystać do planowania ich napraw bieżących i głównych.

Analizę problemu dodatkowo komplikuje wzajemne oddziaływanie poszczególnych elementów konstrukcji, przykładowo nawierzchni kolejowej, podtorza z geosyntetykami i podłoża gruntowego. Wyjściem z tej sytuacji jest wykorzystanie układów analogowych i zastępczych.◀

#### Materiały źródłowe

- [1] American Petroleum Institute. API 653. Tank inspection, repair, altrenation and reconstruction. Washington, 2005.
- [2] Bittner R. Operational calculus in linear spaces. Studia Mathematica, 1961, 20(1), 1-18.
- [3] Hall L. Simulations and analyses of train - induced ground vibrations. A comparative study of two- and three-dimensional calculations with actual measurements (Dissertation). Division of Soil & Rock Mechanics, Department of Civil & Environmental Engineering, Royal Institute of Technology, Stoc-

kholm, Sweden, April 2000.

- [4] Hamdan M.N., Abuzeid O., Al-Salaymeh A. Assessment of an edge type settlement of above ground liquid storage tanks using a simple beam model. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31(11), 2461-2474.
- [5] Latha M.G., Murthy V.S. Effects of reinforcement form on the behavior of geosynthetic reinforced sand. Geotextiles and Geomembranes, 2007, 25(1), 23–32.
- [6] Liang F.-Y., Chen L.-Z., Shi X.-G. Numerical analysis of composite piled raft with cushion subjected to vertical load. Computers and Geotechnics, 2003, 30(6), 443-453.
- [7] Lunne P., Robertson P., Powell J. Cone penetration testing in geotechnical practice. Blackie Academic & Professional, London, 1997, 312.
- [8] Meyer Z. Obliczenia inżynierskie osiadania fundamentów. ZAPOL Publishing, Szczecin, 2012.
- [9] Mieloszyk E., Milewska A., Abramski M. Pale CFGFRPT i ich zastosowanie w budowlach/obiektach offshore (maszynopis).
- [10] Mieloszyk E. Application of non--classical operational calculus to solving some boundary value problem. Integral Transforms and Special Functions, 2000, 9(4), 287-292.
- [11] Mieloszyk E., Grulkowski S. Generalized Taylor formula and shell structures for the analysis of the interaction between geosythetics and engineering structures of transportation lines. W: Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (red.) Shell Structures: Theory and Applications, vol. 4, Taylor & Francis, Londyn, 2018, 561-564.
- [12] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Elastic waves in the railroad track substructures and its surroundings analyzed with non--classical operational methods. 5th International Conference on Road and Rail Infrastructure, W: Stjepan Lakusić (red.) Road and rail infrastructure V, Department of Transportation, Faculty of Civil

Engineering, University of Zagreb, Zagreb, 2018, 1195-1201.

- [13] Mieloszyk E., Nieklasyczny rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Instytut Maszyn Przepływowych, Polska Akademia Nauk, 2008.
- [14] Moravčik M. Experimental investigation of the vehicle – rail interaction. Third International Conference on Traffic Effects On Structures and Environment - TESE'94, Vol. 1, Sept. 1994.
- [15]Nguyen D.D.C, Jo S.-B., Kim, D.-S. Design method of piled-raft foundations under vertical load considering interaction effects. Computers and Geotechnics, 2013, 47, 16-27.
- [16]Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K. Macierzowa analiza konstrukcji. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa-Poznań, 1979, 357.
- [17] PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Warunki techniczne utrzymania podtorza kolejowego. Id-3, Załącznik do zarządzenia Nr 9/2009 Zarządu PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. z dnia 4 maja 2009 r., PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Centrala - Biuro Dróg Kolejowych, 2009.
- [18] Randolph M.F., Clancy P. An approximate analysis procedure for piled raft foundations. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1993, 17(12), 849-869.
- [19]Wiłun Z. Zarys geotechniki. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005, 724.
- [20]Woldringh R. F., New B. M. Embankment design for high speed trains on soft soils. Barends i in. (red.) Geotechnical engineering for transportation infrastructure, Balkema, Rotterdam, 1999.
- [21] Yamashita K., Yamada T., Hamada J. Investigation of settlement and load sharing on piled rafts by monitoring full-scale structures. Soils and Foundations, 2011, 51(3), 513-532.