

Drgania płyty z wypełnieniem sprężystym spoczywającej na podłożu Winklera wywołane ruchomym oscylatorem

Vibrations of the plate with elastic core resting on the Winkler foundation caused by a moving oscillator



Magdalena Ataman

Dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej,
Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl



Wacław Szczesniak

Prof. dr hab. inż.

Wydział Inżynierii Lądowej,
Politechnika Warszawska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy rozważana jest konstrukcja składająca się z dwóch płyt Kirchhoffa połączonych warstwą wypełnienia sprężystego Winklera. Układ płyt spoczywa na podłożu Winklera i obciążony jest jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym, poruszającym się ze stałą prędkością po górnej płycie, równoległe do jednego z boków. Analizowane są drgania wymuszone i drgania swobodne płyt oraz oscylatora. W przypadku tak złożonego układu ruch płyt jest opisany dwoma sprzężonymi równaniami różniczkowymi lub jednym równaniem różniczkowym zawyżonego rzędu. Ponadto ze względu na charakter ruchomego obciążenia (obciążenie inercyjne) równania te mają zmienne, zależne od czasu współczynniki. Otrzymane rozwiązania zilustrowano przykładami obliczeniowymi.

Słowa kluczowe: Drgania płyty z wypełnieniem sprężystym; Podłoże Winklera; Ruchomy oscylator

Abstract: In the paper a structure consisting of two Kirchhoff plates connected by an elastic Winkler layer is considered. The structure rests on the Winkler foundation and is subjected to a one-mass visco-elastic oscillator, moving at a constant speed on the upper plate, parallel to one of the plate sides. Forced and free vibrations of the plates and the oscillator are analysed. In the case of such a complex system vibration of the plates is described by two coupled differential equations, or one differential equation with elevated order. In addition, due to the nature of the moving load (inertial load), these equations have variable, time-dependent coefficients. The solutions are illustrated by numerical examples.

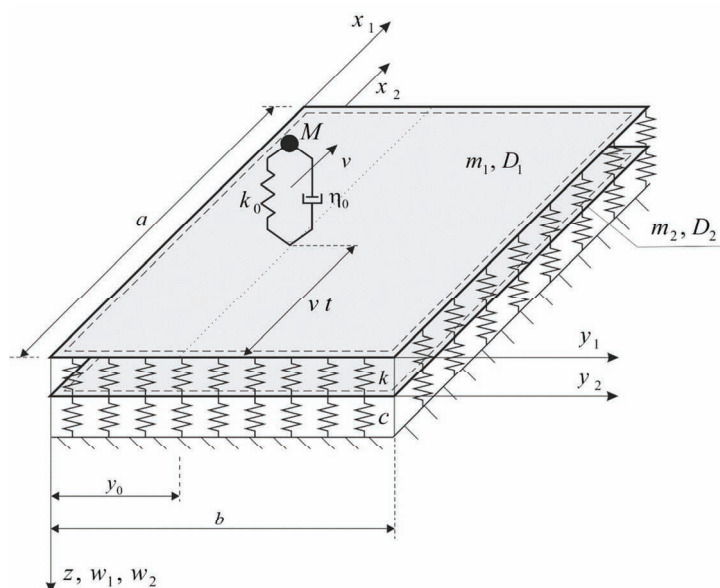
Keywords: Vibration of plate with elastic core; Winkler foundation; Moving oscillator

Konstrukcje warstwowe, a szczególnie płyty, mają szerokie zastosowanie w budownictwie drogowym, mostowym oraz lotniskowym. W literaturze istnieje wiele prac dotyczących zagadnień belek oraz płyt warstwowych. W skład tych opracowań wchodzi zarówno monografie, prace przeglądowe jak i oryginalne rozprawy naukowe. Belki i płyty warstwowe są przedmiotem analizy między innymi prac [1-10]. Analizowane w nich są zagadnienia obciążeń ruchomych, umiarkowanie dużych ugięć, wpływy termiczne, wpływy podłoża sprężystego, nieliniowość fizyczna materiału i inne.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie analizy dynamicznej płyty warstwowej, spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym oscylatorem jednomasowym. Rozważamy dwie

płyty połączone warstwą wypełnienia sprężystego Winklera. Omawiany układ spoczywa na podłożu Winklera. Konstrukcja obciążona jest

jednomasowym oscylatorem lepko-sprężystym poruszającym się ze stałą prędkością po górnej płycie, równoległe do osi x_1 (rys. 1). W pracy prze-



1. Schemat dynamiczny układu płyty – podłoże sprężyste Winklera obciążonego ruchomym oscylatorem jednomasowym

analizowano drgania wymuszone oraz drgania swobodne układu płyt i oscylatora.

Równania ruchu oscylatora oraz układu płyt na podłożu Winklera

Rozważamy małe drgania prostokątnej płyty składającej się z trzech warstw, spoczywającej na podłożu Winklera o współczynniku sprężystości c (rys. 1). Warstwę górną i dolną stanowią jednorodny, sprężyste, cienkie płyty Kirchhoffa o grubości h_1 oraz h_2 . Równomiernie rozłożone masy jednostkowe i sztywności tych płyt wynoszą odpowiednio m_1 i D_1 oraz m_2 i D_2 . Płyty połączone są ze sobą wypełnieniem sprężystym Winklera o współczynniku sprężystości k . Wypełnienie przenosi tylko ściskanie lub rozciąganie. Obciążenie układu stanowi ruchomy oscylator jednomasowy o masie M , poruszający się po powierzchni górnej płyty, równoległe do osi x_1 ze stałą prędkością v . Ugięcie powierzchni środkowej

górnej płyty opisuje współrzędna w_1 , powierzchni środkowej dolnej płyty współrzędna w_2 , a ugięcie masy oscylatora współrzędna w .

Ruch drgający układu płyta warstwowa – oscylator jednomasowy, w przypadku gdy oscylator porusza się po płycie równoległe do osi x_1 , opisują równania różniczkowe (1).

W powyższych wzorach $N(t)$ jest naciskiem dynamicznym ruchomego oscylatora jednomasowego na płytę.

Pochodna materialna w równaniach (1), w przypadku stałej prędkości oscylatora, określona jest następującym wzorem:

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + v \frac{\partial w_1}{\partial x}. \quad (2)$$

Pierwsze z równań (1) jest równaniem lepkosprężystego oscylatora jednomasowego względem położenia równowagi statycznej. Związek (2) wykorzystano w równaniu ruchu oscylatora. Różniczkowe równania ruchu (1) rozważanego układu trzywarstwowego są równaniami częst-

kowymi czwartego rzędu ze względu na zmienne geometryczne x i y oraz drugiego ze względu na czas t . Równania te są ze sobą sprzężone.

Rozwiązanie równań ruchu płyt obciążonych ruchomym oscylatorem

Sprężone równania różniczkowe ruchu górnej i dolnej płyty (1) można sprowadzić do dwóch niezależnych równań z jedną niewiadomą w_1 lub w_2 . Niewiadome ugięcia w_1 i w_2 powiązane są zależnością wynikającą z trzeciego z równań (1):

$$w_1(x, y, t) = \left(1 + \frac{c}{k}\right) w_2(x, y, t) +$$

$$\frac{D_2}{k} \nabla^4 w_2(x, y, t) + \frac{m_2}{k} \frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

Wykorzystując (2) w pierwszym równaniu (1) oraz podstawiając (3) do dwóch pierwszych równań (1) otrzymujemy układ dwóch równań opisujący ruch oscylatora oraz dolnej płyty w następującej postaci (4).

Równanie opisujące drgania dolnej płyty (4)₂ jest równaniem różniczkowym ósmego rzędu i pozostaje sprzęgnięte z równaniem oscylatora (4)₁, które jest rzędu piątego.

Rozwiązania układu równań (4) poszukujemy metodą rozdzielania zmiennych Fouriera zakładając rozwiązanie w postaci podwójnego szeregu:

$$w_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (5)$$

gdzie:

$f_{mn}(t)$ – nieznaną funkcją czasu.

Następnie stosujemy algorytm ortogonalizacyjny do rozwiązania równań ruchu oscylatora i płyty uwzględniając tylko jeden wyraz podwójnego szeregu $m = n = 1$. Równania ruchu oscylatora i górnej płyty w postaci bezwymiarowej zapisujemy w sposób (6):

gdzie:

$\xi = \frac{vt}{a}$, $\eta = \frac{y_0}{b}$ – współrzędne bezwymiarowe,

$w^{st} = \frac{Mg}{k_0}$ – ugięcie statyczne oscylatora,

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + \eta_0 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dw_1}{dt} \right) + k_0 (w - w_1) = 0,$$

$$D_1 \nabla^4 w_1(x, y, t) + m_1 \frac{d^2 w_1(x, y, t)}{dt^2} + k [w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t)] = p_1(x, y, t), \quad (1)$$

$$D_2 \nabla^4 w_2(x, y, t) + m_2 \frac{d^2 w_2(x, y, t)}{dt^2} + k [w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)] + c w_2(x, y, t) = 0,$$

gdzie:

$$p_1(x, y, t) = N(t) \delta(x - vt) \delta(y - y_0) = \left[Mg - M \frac{d^2 w}{dt^2} \right] \delta(x - vt) \delta(y - y_0).$$

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + \eta_0 \left\{ \frac{dw}{dt} - \left[\left(1 + \frac{c}{k}\right) \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{D_2}{k} \nabla^4 \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \frac{m_2}{k_1} \frac{\partial^3 w_2}{\partial t^3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + v \left[\left(1 + \frac{c}{k}\right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{D_2}{k} \nabla^4 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{m_2}{k} \frac{\partial^3 w_2}{\partial t^2 \partial x} \right] \right\} +$$

$$+ k_0 \left\{ w - \left[\left(1 + \frac{c}{k}\right) w_2 + \frac{D_2}{k} \nabla^4 w_2 + \frac{m_2}{k} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right] \right\} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{D_1 D_2}{k} \nabla^4 (\nabla^4 w_2) + \frac{1}{k} (D_1 m_2 + D_2 m_1) \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) + \left[D_1 \left(1 + \frac{c}{k}\right) + D_2 \right] \nabla^4 w_2 +$$

$$+ \left[m_1 \left(1 + \frac{c}{k}\right) + m_2 \right] \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \frac{m_1 m_2}{k} \frac{\partial^4 w_2}{\partial t^4} + c w_2 =$$

$$= \left[Mg - M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta(x - vt) \delta(y - y_0).$$

$$w_2^{st} = \frac{4Mg}{ab \left\{ \frac{D_1 D_2}{k} \gamma_{11}^8 + \left[D_1 \left(1 + \frac{c}{k} \right) + D_2 \right] \gamma_{11}^4 + 2c \right\}}$$

– ugięcie statyczne środka dolnej płyty, wywołane ciężarem oscylatora,

$g_{11}(\xi)$ – bezwymiarowe ugięcie dolnej płyty,

$g_0(\xi)$ – bezwymiarowe przemieszczenie pionowe masy M oscylatora,

$$\gamma_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}.$$

Otrzymany bezwymiarowy układ równań ruchu oscylatora i dolnej płyty jest układem różniczkowych równań zwyczajnych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach z niewiadomymi funkcjami $g_0(\xi)$ i $g_{11}(\xi)$. Rozwiązanie tego układu oraz wyniki graficzne można otrzymać w prosty sposób, np. korzystając z programu MATHEMATICA. Wyznaczona funkcja $g_{11}(\xi)$ jest funkcją ugięcia płyty stanowiącej dolną warstwę układu trzywarstwowego. W celu uzyskania wykresów ugięć górnej płyty należy po wyznaczeniu funkcji $g_{11}(\xi)$ powrócić do współrzędnej $w_2(x,y,t)$, a następnie korzystając ze wzoru (3) obliczyć funkcję $w_1(x,y,t)$. Ugięcie górnej warstwy płyty $w_1(x,y,t)$ można również przedstawić w formie bezwymiarowej, wprowadzając współrzędne bezwymiarowe ξ oraz $\tilde{g}_{11}(\xi)$, przy czym funkcję $\tilde{g}_{11}(\xi)$ należy odnieść do ugięcia statycznego dolnej płyty, wywołanego siłą M_g przyłożoną do górnej warstwy układu.

Rozwiązanie układu trzech równań ruchu sprowadziło się zatem do rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych ósmego rzędu ze względu na zmienne geometryczne x i y oraz czwartego ze względu na czas t . Wyznaczenie ugięć obu płyt oraz przemieszczenia pionowego masy oscylatora możliwe jest również poprzez rozwiązanie układu trzech cząstkowych równań różniczkowych czwartego rzędu ze względu na zmienne x i y oraz drugiego rzędu ze względu na czas t . Równania te są ze sobą sprzężone.

Omówione powyżej rozwiązania obowiązują wtedy, gdy ruchomy

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 q_0(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\eta_0 a}{Mv} \frac{dq_0(\xi)}{d\xi} + \frac{k_0 a^2}{Mv^2} q_0(\xi) = \\ & = \sin \pi \eta \frac{w_2^{st}}{w_2^{st}} \left[\frac{\eta_0 m_2 v}{Mka} \sin \pi \xi \frac{d^3 q_{11}(\xi)}{d\xi^3} + \frac{m_2}{Mk} \left(\eta_0 v \frac{\pi}{a} \cos \pi \xi + k_0 \sin \pi \xi \right) \frac{d^2 q_{11}(\xi)}{d\xi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\eta_0 a}{Mv} \left(1 + \frac{c}{k} + \frac{D_2}{k} \gamma_{11}^4 \right) \sin \pi \xi \frac{dq_{11}(\xi)}{d\xi} + \right. \\ & \left. + \frac{a^2}{Mv^2} \left(1 + \frac{c}{k} + \frac{D_2}{k} \gamma_{11}^4 \right) \left(\eta_0 v \frac{\pi}{a} \cos \pi \xi + k_0 \sin \pi \xi \right) q_{11}(\xi) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 q_{11}(\xi)}{d\xi^4} + \frac{ka^2}{v^2 m_1 m_2} \left[\frac{1}{k} (D_1 m_2 + D_2 m_1) \gamma_{11}^4 + m_1 \left(1 + \frac{c}{k} \right) + m_2 \right] \frac{d^2 q_{11}(\xi)}{d\xi^2} + \\ & + \frac{ka^4}{v^4 m_1 m_2} \left\{ \frac{D_1 D_2}{k} \gamma_{11}^8 + \left[D_1 \left(1 + \frac{c}{k} \right) + D_2 \right] \gamma_{11}^4 + 2c \right\} q_{11}(\xi) = \\ & = \frac{1}{w_2^{st}} \frac{4ka^3 \sin \pi \xi \sin \pi \eta}{b m_1 m_2 v^4} \left(Mg - \frac{Mv^2}{a^2} w_2^{st} \frac{d^2 q_0(\xi)}{d\xi^2} \right), \end{aligned}$$

oscylator znajduje się na płycie tzn. w przypadku, gdy współrzędna bezwymiarowa ξ zawiera się w przedziale $0 \leq \xi \leq 1$.

Po zjechaniu oscylatora z konstrukcji, przy $\xi > 1$ płyta wykonuje drgania swobodne. Drgania swobodne środka dolnej płyty opisuje wyrażenie:

$$\begin{aligned} q_{11}^{sw}(\xi) &= \frac{w_2^{sw}(t)}{w_2^{st}} = \frac{1}{w_2^{st}} \left(K_1 \cos \omega_{11}^{(1)} t + \right. \\ & \left. + L_1 \sin \omega_{11}^{(1)} t + K_2 \cos \omega_{11}^{(2)} t + L_2 \sin \omega_{11}^{(2)} t \right) \end{aligned} \quad (7)$$

W równaniu (7) $\omega_{11}^{(1)}$ i $\omega_{11}^{(2)}$ są częstościami drgań własnych dolnej płyty:

$$\begin{aligned} \omega_{11}^{(1)} &= \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}, \\ \omega_{11}^{(2)} &= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= \frac{k}{m_1 m_2} \left[\frac{1}{k} (D_1 m_2 + D_2 m_1) \gamma_{11}^4 + m_1 \left(1 + \frac{c}{k} \right) + m_2 \right] \\ B &= \frac{D_1 D_2}{m_1 m_2} \gamma_{11}^8 + \frac{k}{m_1 m_2} \left[D_1 \left(1 + \frac{c}{k} \right) + D_2 \right] \gamma_{11}^4 + c \end{aligned}$$

Rozważana płyta jest zatem układem dwumodalnym. Z równań (8) wynika, że drgania własne istnieją, gdy spełniony jest warunek $A^2 > 4B$. W przypadku $A^2 = 4B$ otrzymujemy dodatkowe pasmo drgań własnych o częstości

$$\omega_{11}^{(3)} = \sqrt{\frac{A}{2}} \quad (9)$$

W rozważanym zadaniu można tak dobrać parametry materiałowe płyt, żeby płyta górna nie miała ugięć. W takim przypadku płyta dolna jest absorberem mechanicznym drgań wymuszonych.

Przykład obliczeniowy

Ponieważ rozważany układ równań ruchu (6) jest układem równań różniczkowych, liniowym, czwartego rzędu, o zmiennych współczynnikach, został rozwiązany numerycznie przy pomocy programu Mathematica. Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

- wymiary płyt w planie $a \times b = 5,00\text{m} \times 7,00\text{m}$,
- grubość górnej płyty $h_1 = 0,18\text{m}$,
- moduł sprężystości górnej płyty $E_1 = 38600\text{MPa}$,
- masa przypadająca na jednostkę powierzchni górnej płyty $m_1 = 4500\text{kg/m}^2$,
- współczynnik Poissona górnej płyty $\nu_1 = 0,167$,
- grubość dolnej płyty $h_2 = 0,20\text{m}$,
- moduł sprężystości dolnej płyty $E_2 = 23100\text{MPa}$,
- masa jednostkowa dolnej płyty $m_2 = 4000\text{kg/m}^2$,
- współczynnik Poissona dolnej płyty $\nu_2 = 0,167$,
- współczynnik sprężystości podłoża Winklera $c = 110\text{MN/m}^3$,
- masa resorowana oscylatora $M =$

11723kg,

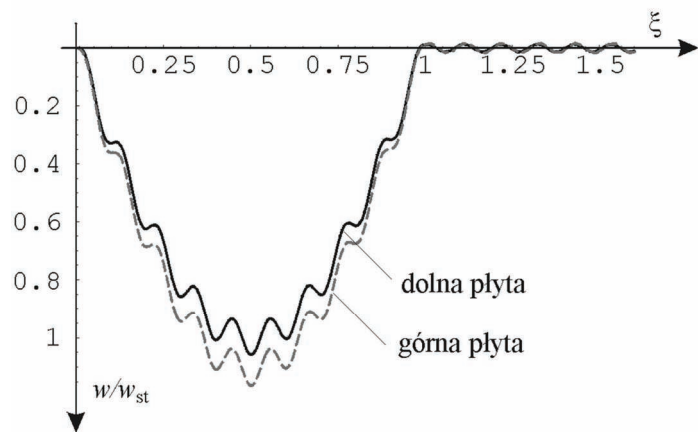
- współczynnik tłumienia oscylatora $\eta_0 = 40\text{kNs/m}$,
- współczynnik sprężystości oscylatora $k_0 = 2000\text{kN/m}$,
- współczynnik sprężystości wypełnienia Winklera $k = 1100\text{MN/m}^3$.

Wyniki zilustrowano wykresami przedstawionymi na rysunkach 2-8. Na rysunkach 2-4 pokazano ugięcia górnej i dolnej płyty we współrzędnych bezwymiarowych przy prędkości oscylatora $v = 50\text{km/h}$, $v = 100\text{km/h}$ i $v = 150\text{km/h}$. Rysunki 5 i 6 ilustrują odpowiednio wpływ prędkości i współczynnika sprężystości podłoża oscylatora na jego na przemieszczenie pionowe masy M . Natomiast na rysunkach 7 i 8 pokazano wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka górnej i dolnej płyty.

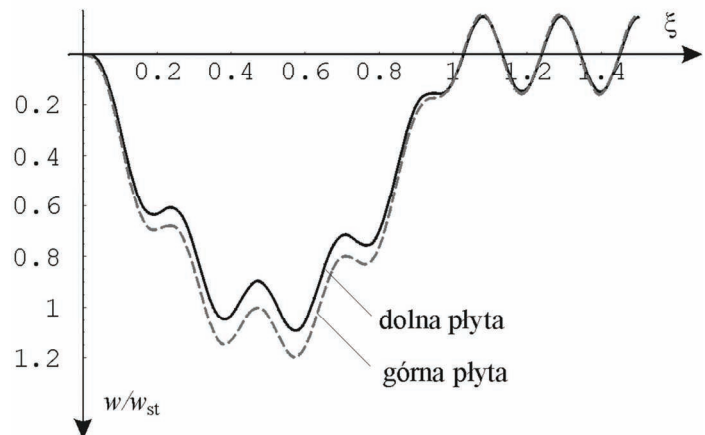
Wnioski

Otrzymany układ dwóch bezwymiarowych równań ruchu (6) jest układem zwyczajnych, liniowych równań różniczkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Jako rozwiązanie otrzymujemy bezwymiarowe wyrażenia $g_0(\xi)$ i $g_{11}(\xi)$ opisujące odpowiednio przemieszczenie pionowe oscylatora i ugięcie dolnej płyty. Mając rozwiązanie równań (6) można wyznaczyć ugięcie górnej płyty korzystając z zależności (3). Przedstawione w pracy wyniki można otrzymać również rozwiązując układ trzech równań różniczkowych czwartego rzędu, sprzężonych ze sobą.

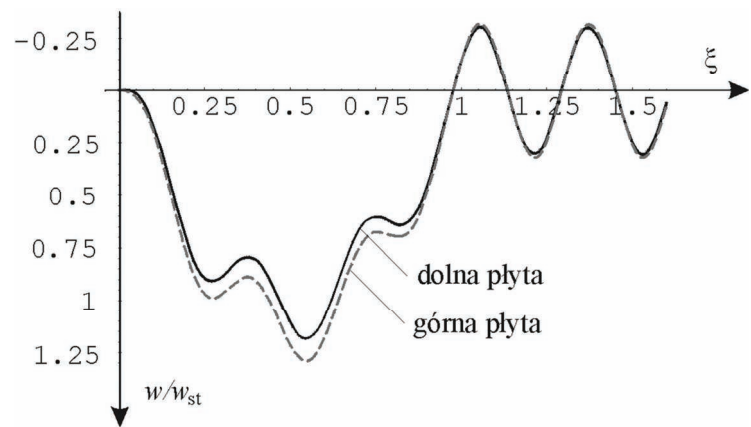
Analizowany układ płyt jest układem dwumodalnym. Istnieje możliwość takiego dobrania parametrów mechanicznych konstrukcji, aby ugięcia górnej płyty, po której porusza się obciążenie były zerowe. Takie przypadki, stanowiące mechaniczne tłumiki drgań, były przedmiotem opracowań między innymi Oniszczuka [5]. ◀



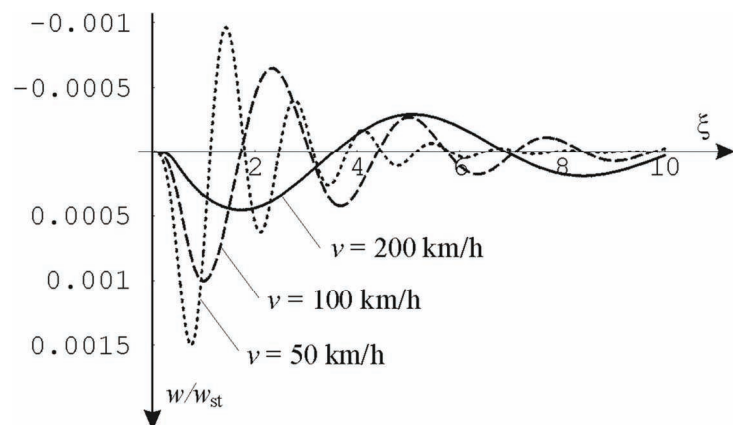
2. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 50 km/h, $0 \leq \xi \leq 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne



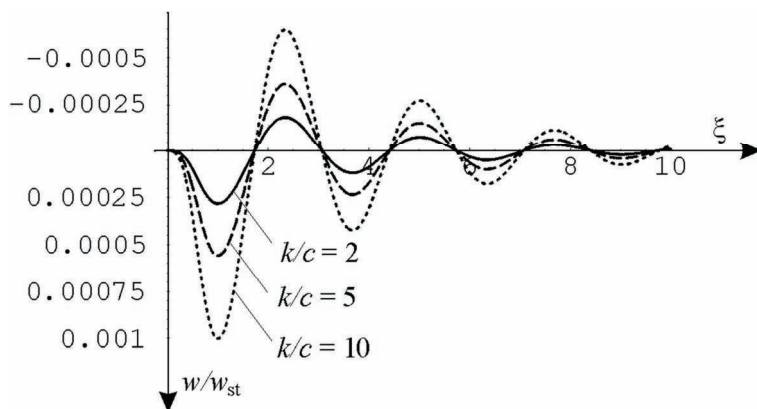
3. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 100 km/h, $0 \leq \xi \leq 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne



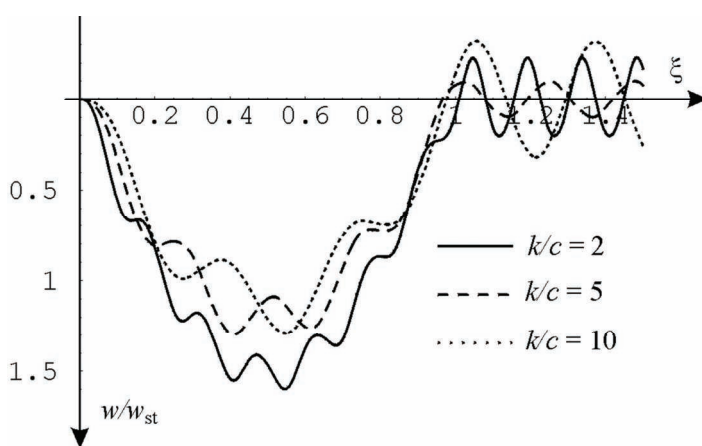
4. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 150 km/h, $0 \leq \xi \leq 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne



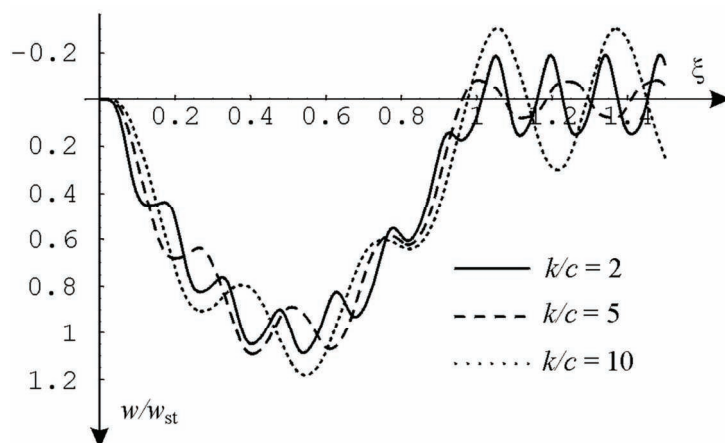
5. Wpływ prędkości oscylatora na jego przemieszczenie pionowe



6. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na przemieszczenie pionowe masy M oscylatora poruszającego się z prędkością $v = 100$ km/h, przy stałej wartości współczynnika sprężystości wypełnienia $k = 1100$ MN/m³



7. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka górnej płyty, prędkość $v = 150$ km/h, współczynnik sprężystości wypełnienia $k = 1100$ MN/m³



8. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka dolnej płyty, prędkość $v = 150$ km/h, współczynnik sprężystości wypełnienia $k = 1100$ MN/m³

Materiały źródłowe

[1] Ataman M. Analiza drgań belki warstwowej na podłożu Winklera obciążonej ruchomym oscylatorem. Księga Konferencyjna 11-go Seminarium Polsko-Ukraińskiego, Theoretical Foundations of Civil Engineering, OWPW, War-

szawa 2003, str. 261-268.

[2] Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Academia, Prague 1999.
 [3] Hoop T. Konstrukcje warstwowe. Arkady, Warszawa 1980.
 [4] Mead D.J., Markus S. The forced vibration of a three-layer, dam-

ped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. Journal of Sound and Vibration, 1969, 10, pp. 163-175.

[5] Oniszczuk Z. Analiza drgań złożonych układów ciągłych z więzami sprężystymi. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1997.
 [6] Rao D.K. Forced vibrations of a damped sandwich beam subjected to moving forces. Journal of Sound and Vibration, 1977, 54 (2), pp. 215-227.
 [7] Szcześniak W. Drgania płyty zespolonej z wypełnieniem Winklera wywołane ruchomą siłą skupioną Księga Konferencyjna Seminarium Polsko-Rosyjskiego, Teoretyczne Podstawy Budownictwa, Moskwa 1996, str. 122-137.
 [8] Szcześniak W. Drgania belki sandwichowej pod wpływem ruchomego obciążenia skupionego. Prace Naukowe PW, Budownictwo, z. 132, 1998, str. 111-151.
 [9] Szcześniak W. Drgania płyty sandwichowej pod wpływem ruchomego obciążenia bezinercyjnego. Prace Naukowe PW, Budownictwo, z. 132, 1998, str. 153-172.
 [10] Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных ортотропных пластин с жестким заполнителем. Проблемы устойчивости в строительной механике. Ред. В.В. Болотин, Издат. литерат. по строительству, Москва 1965.