

Zmiana więzów w linowych strukturach przegubowych

Change of constraints in rope articulated structures



Wacław Szczesniak

Prof. dr hab. inż.

Wydział Inżynierii Lądowej,
Politechnika Warszawska

w.szczesniak@il.pw.edu.pl



Magdalena Ataman

Dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej,
Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy przeanalizowano cztery przykładowe płaskie i przestrzenne układy materialne, w których nagle usunięto część więzów. Analizowano prostą strukturę składającą się z dwóch lin i punktu materialnego, strukturę przestrzenną złożoną z trzech nieważkich lin i punktu materialnego, belkę podwieszoną na dwóch linach oraz tarczę kołową również podwieszoną na dwóch linach. We wszystkich przypadkach nagle przecięto jedną z lin. Rozwiązania uzyskano metodą analityczną, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszeń. Uzyskane wyniki zilustrowano wykresami przyspieszeń, przyspieszeń kątowych i sił działających w rozważanych układach.

Słowa kluczowe: Struktury przegubowe; Zmiana więzów; Chwilowy środek przyspieszenia

Abstract: In the paper four examples of two-dimensional and three-dimensional material systems, in which some of constraints were suddenly removed, are analyzed. A simple structure consisting of two ropes and a particle, a spatial structure consisting of three weightless ropes and a particle, and a beam suspended on two ropes and a circular shield, also suspended on two ropes, were analyzed. In all cases one of the ropes was suddenly cut. Solutions were obtained by the analytical method, using the properties of the instantaneous center of acceleration. The obtained results are illustrated by diagrams of accelerations, angular accelerations and forces acting in the considered systems.

Keywords: Articulated structures; Change of constraints; Instantaneous center of acceleration

Nagła zmiana więzów w konstrukcjach budowlanych często prowadzi do stanów awaryjnych i katastrofalnych obiektów inżynierskich [3]. Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są płaskie i przestrzenne układy materialne. Rozwiązano cztery przykładowe struktury, w których nagle usunięto część więzów. W chwili początkowej $t = 0^+$, tuż po zmianie więzów, wyznaczono przyspieszenia, a także układ wszystkich reakcji zewnętrznych oraz sił wewnętrznych w nierozciągliwych linach. Zadania rozwiązano metodą analityczną korzystając z własności chwilowego środka przyspieszeń [10-15]. Należy podkreślić, że w chwili $t = 0^+$ w układzie nie występują jeszcze żadne prędkości i prędkości kątowe, natomiast są już przyspieszenia oraz siły zewnętrzne i wewnętrzne w osłabionym układzie materialnym. W takich

przypadkach chwilowy środek obrotu (prędkości) pokrywa się z chwilowym środkiem przyspieszenia.

Nagła zmiana więzów punktu materialnego podwieszono na dwóch oraz na trzech linach

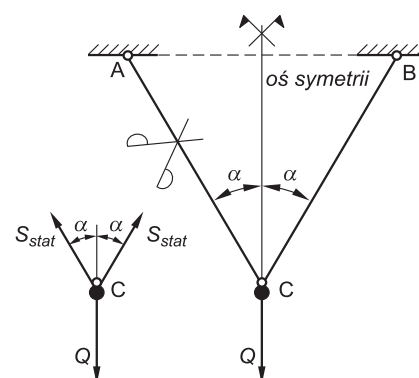
Rozważmy płaską strukturę pokazaną na rysunku 1, z punktem materialnym C o ciężarze Q . Początkowo (przed usunięciem więzów) siły w obu linach są jednakowe. Wyznaczymy je z równowagi statycznej węzła C mamy równanie, z którego wyznaczymy statyczne siły wewnętrzne jednakowe w obu prętach:

$$2S_{\text{stat}} \cos \alpha = Q \rightarrow S_{\text{stat}} = \frac{Q}{2 \cos \alpha}. \quad (1)$$

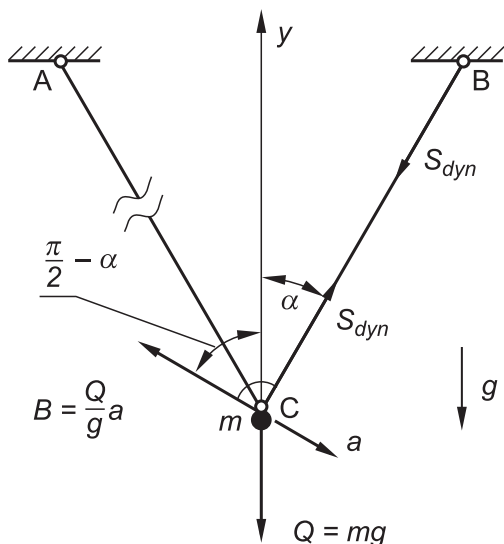
Tuż po przecięciu linki AC w układzie nie ma jeszcze prędkości, natomiast jest już przyspieszenie a punktu ma-

terialnego o ciężarze Q . Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2, z równań kinostatyki węzła C znajdujemy siłę S_{dyn} w nie przeciętym przecię:

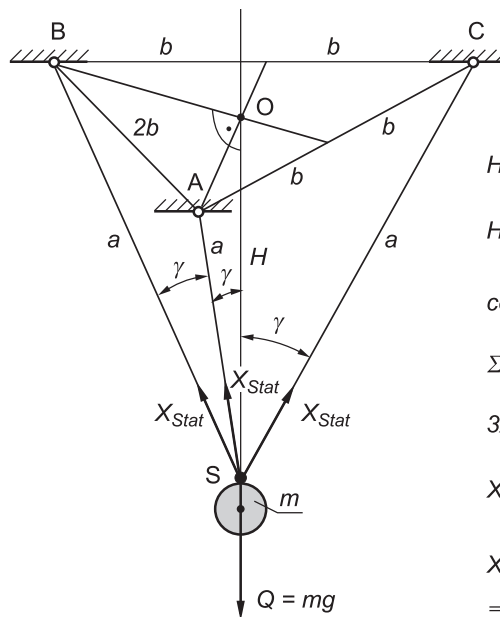
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow S_{\text{dyn}} \cos \alpha + \frac{Q}{g} a \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = Q \\ &\rightarrow S_{\text{dyn}} = \frac{Q}{\cos \alpha} \left(1 - \frac{a}{g} \sin \alpha \right) \quad (2) \end{aligned}$$



1. Schemat statyczny płaskiej struktury przed przecięciem linki AC



2. Schemat dynamiczny płaskiej struktury po przecięciu linki AC



4. Przestrzenna struktura prętowa przed przecięciem linki BS

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2 - 4b^2}$$

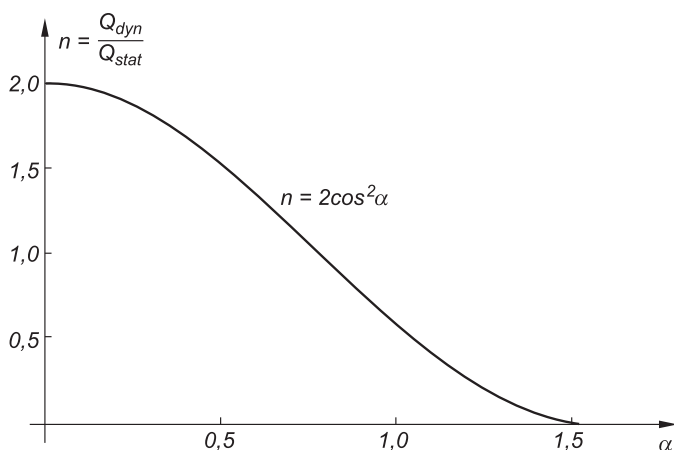
$$\cos\gamma = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{a\sqrt{3}}$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$3X_{stat}\cos\gamma = mg$$

$$X_{stat} = \frac{mg}{3\cos\gamma}$$

$$X_{stat} = \frac{1}{3}mg \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$$



3. Wykres współczynnika dynamicznego czyli funkcji $n = n(a)$, w zależności od kąta $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$

Przyspieszenie a wyznaczmy, wykorzystując równanie kinetostatyki sumy momentów wszystkich sił względem punktu B (rys. 2) poziomego stropu w chwili $t = 0^+$:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow Ql \sin\alpha - \frac{Q}{g}al = 0$$

$$\rightarrow a = g \sin\alpha. \quad (3)$$

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow 3X_{stat} \cos\gamma = Q \rightarrow X_{stat} = \frac{Q}{3\cos\gamma} = \frac{mg}{3\cos\gamma},$$

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2 - 4b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3a}\sqrt{3a^2 - 4b^2}, \quad (5)$$

$$X_{stat} = \frac{1}{3}mg \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow 2Y_{dyn} \cos\gamma + mp \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = mg \rightarrow 2Y_{dyn} \cos\gamma + mp \sin\beta = mg, \quad (6)$$

$$\sin\beta = \frac{\frac{1}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{b\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad h = \sqrt{3a^2 - 4b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{a\sqrt{3}}.$$

$$\Sigma M_{AC} = 0 \rightarrow mg \frac{1}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2} = m p h \rightarrow p = \frac{b g \sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (7)$$

Stosunek siły dynamicznej w linie BC do siły statycznej w tej linie znajdziemy w następujący sposób:

$$n = \frac{S_{dyn}}{S_{stat}} = 2(\cos\alpha)^2. \quad (4)$$

Wykres funkcji $n = n(a)$, przy $a \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ pokazano na rysunku 3.

Rozpatrzmy teraz strukturę przestrzenną złożoną z trzech linek, zamocowanych przegubowo w sztywnym poziomym stropie w punktach A, B i C, a zbiegających się do punktu S, w którym podwieszono punkt materialny o masie m . Liny mają jednakową długość a , zaś punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta równobocznego o zadanej długości boku równej $2b$, jak na rysunku 4. Układ pozostaje w równowadze w polu grawitacyjnym ziemskim. W pewnej chwili przecięto raptownie linkę SB. Wyznamy stosunek siły dynamicznej do siły statycznej w każdej nieprzeciętej linie.

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 4, w przypadku statycznym, z uwagi na symetrię układu względem osi pionowej, przechodzącej przez punkt S, siły od obciążenia statycznego w trzech linach są jednakowe i możemy je wyznaczyć z równania równowagi (5) wyciętego węzła S:

Po raptownym przecięciu linki BS, zgodnie z oznaczeniami na rysunku 5, układ sił w węźle S ulega zmianie.

Brak jest jeszcze prędkości w układzie, natomiast występuje już przyspieszenie punktu materialnego o masie m , które będziemy oznaczać literką p . Pozorna siła bezwładności d'Alemberta $B = m p$ jest prostopadła do wysokości h trójkąta ACS. W węźle S występują teraz cztery siły: dwie siły Y_{dyn} w pozostałych dwóch linach, siła bezwładności B oraz ciężar punktu materialnego $Q = m g$.

Suma rzutów miar sił na pionową oś symetrii prowadzi do następującego równania równowagi kinetostatycznej (równanie 6):

Brakujące we wzorach (5) i (6) przyspieszenie p wyznaczymy z równania kinetostatyki sumy momentów względem osi AC prostopadłej do wysokości h i do wektora siły bez-

władności B . Mamy zatem równanie (7). Wstawiając teraz p , $\cos y$, $\sin \beta$ do równania równowagi kineto-stycznej (6)2 otrzymamy jedno równanie z niewiadomą siłą Y_{dyn} występującą w każdej z pozostałych dwóch linek, a zatem:

$$2Y_{dyn} \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{a\sqrt{3}} + m \frac{b^2 g}{3(a^2 - b^2)} = mg, \quad (8)$$

$$Y_{dyn} = mg \frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{3a^2 - 4b^2}{2(a^2 - b^2)}.$$

Iloraz siły dynamicznej Y_{dyn} do siły statycznej X_{stat} w linie jest następujący:

$$n = \frac{Y_{dyn}}{X_{stat}} = \frac{3a^2 - 4b^2}{2(a^2 - b^2)}. \quad (9)$$

W szczególnym przypadku, jeśli $a = 2b$, odpowiedź (9) daje $n = 4/3$.

Belka podwieszona na linach

Niech pozioma belka AB o masie m i długości $2l$ wisi na dwóch nierozciągliwych linkach, zbiegających się w punkcie O. W pewnej chwili przecięto nagle linkę DB. Zadaniem naszym będzie wyznaczenie składowych przyspieszenia środka belki a_x i a_y , przyspieszenia kątownego belki ε oraz siły dynamicznej N w drugiej, nieprzeciętej linie FA, w chwili tuż po przecięciu linki DB. Tak sformułowane zadanie znajduje się w zbiorze zadań Mieszczerskiego [4], powtórzone w zbiorze Antoniuka i Kiedrzyńskiego [1]. Pewne rozwiązanie tego zadania podano w pozycjach [5, 7, 10]. Zagadnienia związane z dynamiką omawianych układów znaleźć można również w publikacjach [2, 6, 8, 9]. Metoda rozwiązania podana w [7] sprowadza się do ułożenia trzech równań równowagi kinetostatycznej i dwóch równań geometrycznych na współrzędne środka belki, które wyrażone przez dwa kąty obrotu linki FA - ψ i kąt obrotu belki dookoła punktu A oznaczony φ . W efekcie po dwukrotnym zróżniczkowaniu i wyrugowaniu kąta ψ , otrzymuje się równanie więzów, które z trzema

$$\varepsilon \tilde{x} = a_y, \quad H = \tilde{x} \operatorname{ctg} \alpha - l \operatorname{ctg} \varphi, \quad H = \tilde{x} \operatorname{tg} \alpha = \tilde{x} \frac{a_x}{a_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_x}{a_y},$$

$$H = H \rightarrow \tilde{x} = \frac{a_y l \operatorname{ctg} \varphi}{a_y \operatorname{ctg} \varphi - a_x}, \quad \varepsilon \tilde{x} = a_y \rightarrow \frac{l \varepsilon \operatorname{ctg} \varphi = a_y \operatorname{ctg} \varphi - a_x. \quad (11)$$

$$a_x = \frac{g \cos \varphi}{4 \cos \varphi \operatorname{ctg} \varphi + \sin \varphi}, \quad a_y = \frac{2g(2 + \cos 2\varphi)}{5 + 3 \cos 2\varphi},$$

$$\varepsilon = \frac{6g \cos^2 \varphi}{l(5 + 3 \cos 2\varphi)}, \quad N = \frac{2mg \cos \varphi}{5 + 3 \cos 2\varphi}, \quad (12)$$

$$a_c = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}, \quad a_A = \frac{a_x}{\cos \varphi}.$$

$$a_x = \frac{\sqrt{3}}{13} g, \quad a_y = \frac{10}{13} g, \quad N = \frac{2\sqrt{3}}{13} mg, \quad \varepsilon = \frac{9}{13} \frac{g}{l}. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow N \sin \varphi - m a_x = 0, \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N \cos \varphi + m a_y - m g = 0, \\ \sum M_o = 0 &\rightarrow N e - J_o \varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

$$e = \left(\frac{R}{2} \operatorname{ctg} \varphi + R \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \varphi = \frac{R}{2} (\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi), \quad J_o = \frac{1}{2} m R^2.$$

$$\varepsilon \tilde{x} = a_y, \quad H = \tilde{x} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R}{2} (\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}), \quad H = \tilde{x} \operatorname{tg} \alpha = \tilde{x} \frac{a_x}{a_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_x}{a_y},$$

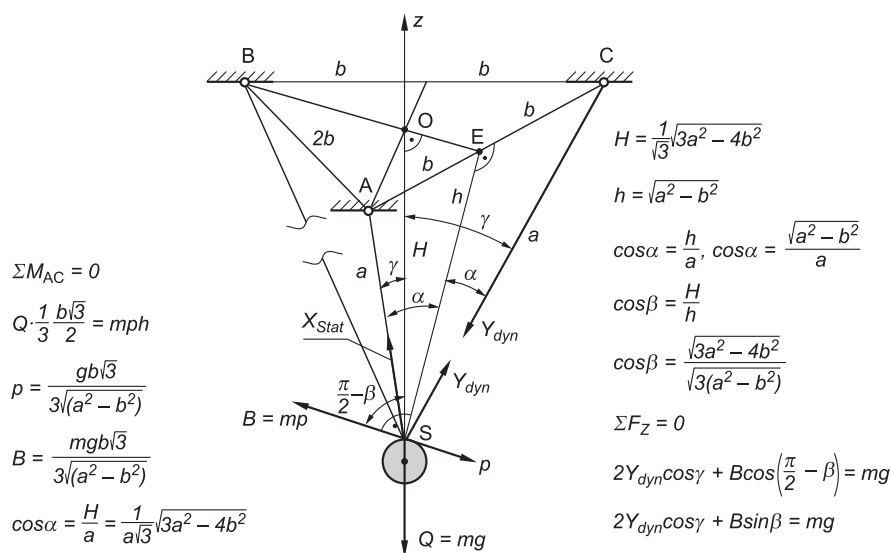
$$H = H \rightarrow \tilde{x} = \frac{R (\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}) a_y}{2(a_y \operatorname{ctg} \varphi - a_x)}, \quad \varepsilon \tilde{x} = a_y \rightarrow \frac{\varepsilon R (\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}) = 2(a_y \operatorname{ctg} \varphi - a_x). \quad (15)$$

$$a_x = \frac{2g \cos \varphi}{\cos \varphi (2\sqrt{3} + 3 \operatorname{ctg} \varphi) + 5 \sin \varphi}, \quad a_y = g - \frac{2g \cos^2 \varphi}{4 - \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi},$$

$$\varepsilon = \frac{2g \cos \varphi (\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi)}{a (4 - \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi)}, \quad S = \frac{2mg \cos \varphi}{4 - \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi}, \quad (16)$$

$$a_o = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}, \quad a_A = \frac{a_x}{\cos \varphi}.$$

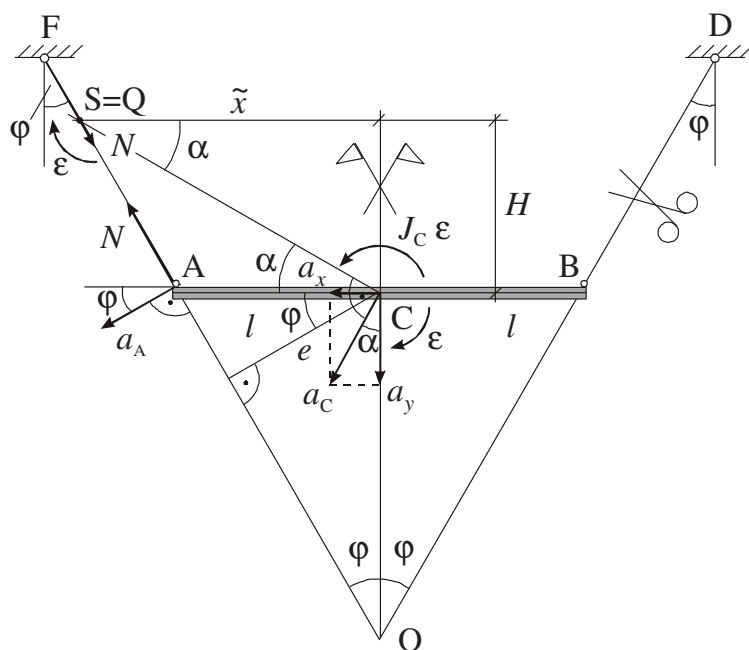
$$a_x = \frac{\sqrt{3}}{10} g, \quad a_y = \frac{7}{10} g, \quad \varepsilon = \frac{3}{5} \frac{g}{a}, \quad S = \frac{1}{5} \sqrt{3} mg, \quad a_o = \frac{\sqrt{13}}{5} g. \quad (17)$$



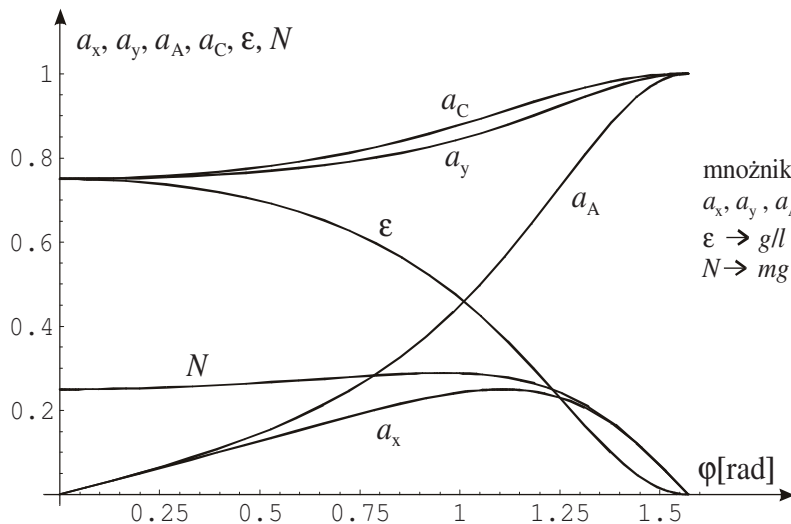
$$\begin{aligned} \Sigma M_{AC} &= 0 \\ Q \cdot \frac{1}{3} \frac{b\sqrt{3}}{2} &= m p h \\ p &= \frac{g b \sqrt{3}}{3l(a^2 - b^2)} \\ B &= \frac{m g b \sqrt{3}}{3l(a^2 - b^2)} \\ \cos \alpha &= \frac{H}{a} = \frac{1}{a\sqrt{3}} \sqrt{3a^2 - 4b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3a^2 - 4b^2} \\ h &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ \cos \alpha &= \frac{h}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ \cos \beta &= \frac{H}{h} \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{\sqrt{3(a^2 - b^2)}} \\ \Sigma F_z &= 0 \\ 2Y_{dyn} \cos \gamma + B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= mg \\ 2Y_{dyn} \cos \gamma + B \sin \beta &= mg \end{aligned}$$

5. Przestrzenna struktura prętowa po przecięciu linki BS



6. Schemat dynamiczny rozważanej belki sztywnej



7. Bezwymiarowe wykresy a_x, a_y, ϵ i N w funkcji kąta φ w belce sztywnej

mnożniki:
 $a_x, a_y, a_A, a_C \rightarrow g$
 $\epsilon \rightarrow g/l$
 $N \rightarrow mg$

podstawowymi równaniami ruchu prowadzi do rozwiązania zadania.

Tutaj postąpimy nieco inaczej, bardziej ogólnie, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszeń, który w pierwszej chwili po zerwaniu pierwszej linki pokrywa się z chwilowym środkiem obrotu (prędkości). Poza tym rozwiązanie nasze będzie ważne przy dowolnej wartości kąta $\psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, w którym będzie zawarty kąt φ . Zgodnie z oznaczeniami pokazanymi na rysunku 6, trzy równania kinetostatyki w przyjętym układzie współrzędnych przy wprowadzeniu zmiennego kąta φ zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\rightarrow N \sin \varphi - m a_x = 0, \\ \Sigma F_y = 0 &\rightarrow N \cos \varphi + m a_y - m g = 0, \\ \Sigma M_c = 0 &\rightarrow N e - J_c \epsilon = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$e = l \cos \varphi, J_c = 1/3 m l^2$$

W pierwszych trzech równaniach (10) występują cztery niewiadome a_x, a_y, ϵ i N . Brakujące równanie więzów wyznaczmy z lematu Eulera wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszenia $S = Q$, bowiem w chwili tuż po przecięciu linki DB chwilowe prędkości belki i jej chwilowa prędkość kątowa są równe zero. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 mamy zatem równanie (11).

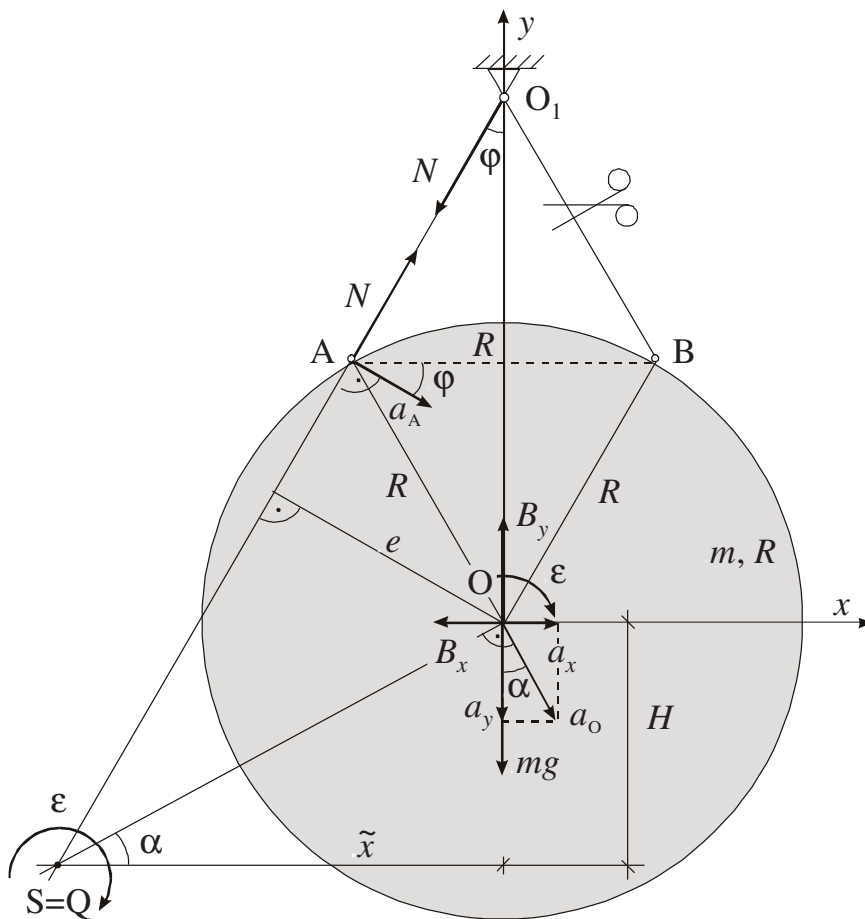
Rozwiązując układ czterech równań, w skład których wchodzi równania kinetostatyki (10) i równanie więzów opisane ostatnim ze wzorów (11), otrzymujemy odpowiedzi (12).

Na rysunku 7 pokazano w sposób graficzny odpowiedzi (12).

W przypadku $\varphi = \pi/6 = 30^\circ$ odpowiedzi (12) redukują się do równań (13).

Tarcza kołowa podwieszona na linach

Ostatnim zadaniem jest kołowa tarcza sztywna o masie całkowitej m i promieniu R , również zawieszona



8. Schemat dynamiczny tarczy kołowej z układem przyspieszeń i sił w chwili tuż po przecięciu linki $O_1 B$

na dwóch nierozciągliwych linkach, zbieżnych w przegubie O_1 i tworzących z pionową osią symetrii kąty φ . Odcinek AB niechaj będzie równy R . W pewnym momencie przecięto raptownie linkę $O_1 B$ i układ stał się mechanizmem. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 8 mamy wyznaczyć cztery wielkości trzy kinematyczne i jedną dynamiczną a_x, a_y, ϵ i N .

Zadanie rozwiązujemy bardzo podobnie jak trzy poprzednie. Trzy równania ruchu kinetostatyki zapisujemy standardowym sposobem: (14)

Brakujące równanie więzów wyznaczamy z lematu Eulera, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszenia, który w chwili tuż po przecięciu linki pokrywa się z chwilowym środkiem obrotu, bowiem wszystkie prędkości w takiej chwili są równe zero. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 8 możemy zapisać związki: (15).

Rozwiązując układ czterech rów-

nań: (14) i (15) otrzymujemy odpowiedź (16).

W szczególnym przypadku $\varphi = \pi/6 = 30^\circ$ odpowiedzi (16) redukują się do (17) ◀

Materiały źródłowe

[1] Antoniuk E., Kiedrzyński A. Zadania z mechaniki ogólnej. Dynamika. PWN, Warszawa 1959.
 [2] Karelitz G.B., Ormondroyd J., Garrelts J.M. Problems in mechanics. Based on the original collection of I.V. Mestchersky. The MACMILLAN Comp. 1939.
 [3] Z. Mazurkiewicz, M. Żórawski, Wpływ nagłej zmiany więzów na odkształcenia ustrojów sprężystych. Archiwum Inżynierii Lądowej 1962, z. 4 s. 439-447; Effect of abrupt change of constraints on deformations of elastic systems. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech. 1962, Vol.10, No. 9, pp. 395-403.

[4] Mestchersky I.V. Collection of problems in theoretical mechanics. Ed. 36. Nauka, Moskwa 1986 (in Russian).
 [5] Neuber H. Lösungen zur Aufgabensammlung Mestchersky. VEB Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin 1956.
 [6] Rao S.S. Mechanical Vibrations. Pearson Education Inc., New Jersey 2004.
 [7] Romicki R. Rozwiązania zadań z mechaniki zbioru W.I. Mieszczerskiego. cz. I-II. PWN, Warszawa 1971.
 [8] Smart E. H. Advanced Dynamics. Vol. I-II. MacMillan, London 1951.
 [9] Spiegel M.R. Theoretical Mechanics. Schaum's Outline Series. Schaum Publishing CO., New York 1967.
 [10] Szcześniak W. Dynamika analityczna i MATHEMATICA. OW PW, Warszawa 2005.
 [11] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna w zadaniach dla docieklivych. OW PW, Warszawa 2010.
 [12] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych. OW PW, Warszawa 2013.
 [13] Szcześniak W., Ataman M. Cztery wybrane zadania z dynamiki analitycznej. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions 14, OW PW, Warszawa 2006, str. 363-372.
 [14] Szcześniak W., Ataman M. Instantaneous change of constraints in mechanics. 10 th International Conference TANS COMP, Zakopane 2006, pp. 319-328.
 [15] Szcześniak W., Ataman M. Sudden change of constraints in selected suspended structures. XXVII R-S-P Seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering, MATEC Web of Conferences 196, 01028 (2018).