# Metoda ruchomej cięciwy do wyznaczania krzywizny osi toru

## The moving chord method for determining the curvature of the track axis

***Władysław Koc***

*Prof. dr hab. inż.*

*Politechnika Gdańska*

*kocwl@pg.edu.pl*

**Streszczenie:** W pracy podjęto kwestię wyznaczania krzywizny osi toru kolejowego w celu stworzenia możliwości określenia charakterystyk geometrycznych pomierzonej trasy. Wykorzystano przy tym nową koncepcję wyznaczania krzywizny metodą zmiany kątów nachylenia ruchomej (wirtualnej) cięciwy, na podstawie znajomości współrzędnych kartezjańskich danego rejonu trasy. Weryfikacja zaproponowanej metody, przeprowadzona na jednoznacznie zdefiniowanych modelowych układach geometrycznych torów, wykazała całkowitą zgodność uzyskanych wykresów krzywizny z wykresami stanowiącymi podstawę uzyskania odpowiadającego rozwiązania geometrycznego. Zastosowanie metody ruchomej cięciwy do wyznaczania krzywizny eksploatowanego toru kolejowego wykazało, że uzyskane wykresy krzywizny różnią się wyraźnie od wykresów dla układów modelowych; mają one mniej regularny, oscylacyjny charakter, co wynika z występujących deformacji toru oraz błędu pomiarowego. Nie przeszkadza to jednak, żeby na takiej podstawie można było oszacować podstawowe parametry geometryczne pomierzonego układu.

***Słowa kluczowe:*** *Droga kolejowa; Krzywizna osi toru; Weryfikacja nowej metody obliczeniowej; Określenie możliwości aplikacyjnych*

**Abstract:** The paper adresses the issue of determining the curvature of the axis of the railway track in order to enable the determination of the geometrical characteristics of the measured route. A new concept of determining the curvature was used by the method of changing the angles of inclination of a moving (virtual) chord based on the knowlege of the Cartesian coordinates of a given region of the route. The verification of the proposed method, carried out on unambiguosly defined model geometric track layouts, showed the complete agreement of the obtained curvature diagrams with the diagrams constituting the basis for obtaining the corresponding geometric solution. The use of the moving chord method to determine the curvature of the operated railway track showed that the obtained curvature plots clearly differ from those for model layouts; they have a less regular, oscillating character, which results from the track deformation and measurement error. However, this does not prevent the possibility of estimating the basic geometrical parameters of the measured layout on this basis.

***Keywords:*** *Railroad; Curvature of the track axis; Verification of a new calculation method; Determination of application possibilities*

### Wprowadzenie

Pomiary geodezyjne służące określaniu i ocenie kształtu osi toru stanowią podstawę do wyznaczenie podstawowych parametrów geometrycznych trasy. W odniesieniu do płaszczyzny poziomej parametrami tymi są:

- położenie i długości odcinków prostych,
- położenie łuków kołowych wraz z określeniem ich promienia i długości,
- położenie krzywych przejściowych wraz z określeniem ich rodzaju i długości.

Na podstawie tych danych staje się możliwe ustalenie maksymalnej prędkości jazdy pociągów oraz – co wydaje się być sprawą podstawową – uzyskanie danych do zaprojektowania regulacji osi toru.

Stosowane metody pomiarowe mają bardzo długą tradycję i chociaż podlegają różnym innowacjom, cechuje je duża pracochłonność i związana z tym konieczność ponoszenia znacznych nakładów finansowych. Zasady przeprowadzania pomiarów są podobne w różnych zarządach kolejowych [1-4, 10-12, 14]. Zgodnie z przepisami obowiązującymi w Polsce [13], pomiar odcinków prostych dokonuje się metodą rzędnych i odciętych wzdłuż linii pomiarowych, z wykorzystaniem stosownej osnowy geodezyjnej. Pomiary na łuku obejmują pomiar strzałek poziomych odniesionych do cięciwy wyznaczonej przez oś celową teodolitu (tzw. metoda bezpośrednia) lub znaków regulacji osi toru (metoda pośrednia).

Bardziej nowoczesny system pomiarowy stanowi tachimetr umieszczony na wózku, pozwalający dodatkowo na wykonanie pomiaru pochylenia toru (za pomocą inklinometru) i pomiaru jego szerokości. Radykalną poprawę istniejącej sytuacji powinna zapewnić rozwijana w Polsce od kilkunastu lat metoda mobilnych pomiarów satelitarnych [15]. Polega ona na ciągłej rejestracji współrzędnych osi toru za pomocą odbiorników GNSS zainstalowanych na poruszającej się platformie pomiarowej oraz wykorzystaniu zebranych danych pomiarowych w odpowiednich algorytmach obliczeniowych.

Przy identyfikacji pomierzonego układu geometrycznego na podstawie przeprowadzonych pomiarów nasuwa się w pierwszym rzędzie rozwiązanie polegające na określeniu występującej krzywizny. W praktyce inżynierskiej identyfikację charakteru krzywizny poziomej występującej w danym układzie geometrycznym toru przeprowadza się najczęściej w sposób pośredni – na podstawie pomierzonych strzałek od cięciwy rozciągniętej wzdłuż toru. Metoda wykresu strzałek jest wciąż bardzo popularna na kolei, gdyż właściwie nie ma dla niej innej alternatywy. Ponieważ wykres strzałek jest bardzo podobny do wykresu krzywizny, niektórzy traktują tę metodę jako sposób wyznaczania krzywizny toru. Z formalnego punktu widzenia jest to oczywiście nieuzasadnione. Ponadto należy uwzględnić fakt, że sporządzony wykres strzałek pokazuje co prawda wartości pomierzonych strzałek poziomych, jednak nie są na nim określone kierunki, w których te strzałki są mierzone. Linię odniesiona stanowią tutaj bowiem kierunki ustawienia cięciwy, które się stale zmieniają. Należy zaznaczyć, że pomiar strzałek (poziomych i pionowych) stanowi od wielu lat podstawę metod diagnostycznych odnoszących się do oceny stanu geometrycznego torów kolejowych.

W niniejszej pracy przedstawiono nową metodę wyznaczania krzywizny na podstawie znajomości współrzędnych kartezjańskich osi toru kolejowego. Metoda ta polega na wykorzystaniu wartości zmiany kąta nachylenia cięciwy na długości układu geometrycznego. Została ona określona mianem „metody ruchomej cięciwy".

## Idea metody ruchomej cięciwy

Krzywizna toru jest określana na jego długości *l*, w liniowym układzie współrzędnych. Miarą zakrzywienia trasy jest stosunek kąta, o jaki zmienia się kierunek osi podłużnej pojazdu po przebyciu pewnego łuku, do długości tegoż łuku (rys. **1**). Krzywizną krzywej *K* w punkcie M nazywamy granicę, do której dąży stosunek kąta ostrego $\Delta\Theta$ zawartego między stycznymi do krzywej *K* w punktach *M* i $M_1$ do długości łuku $\Delta l$, gdy punkt $M_1$ dąży po krzywej *K* do punktu *M*.

$$\kappa = \lim_{\Delta l \to \infty} \left| \frac{\Delta\Theta}{\Delta l} \right| \tag{1}$$

Jeśli znany jest analityczny zapis funkcji $\Theta(l)$ , wówczas obowiązuje wzór

$$\kappa(l) = \frac{d}{dl}\Theta(l) \tag{2}$$

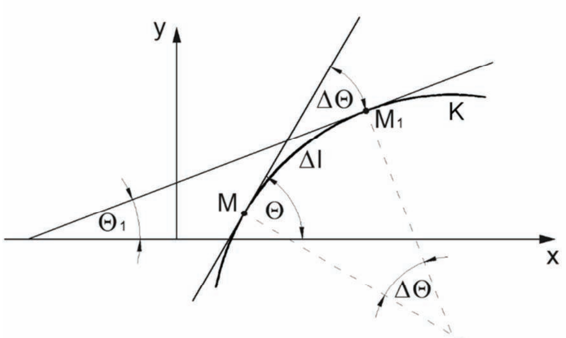
Praktyczny sposób określania krzywizny (dla niedużych wartości $\Delta l$) polega na wykorzystaniu wzoru uproszczonego:

$$\kappa(l) \cong \frac{\Delta\Theta}{\Delta l} \tag{3}$$

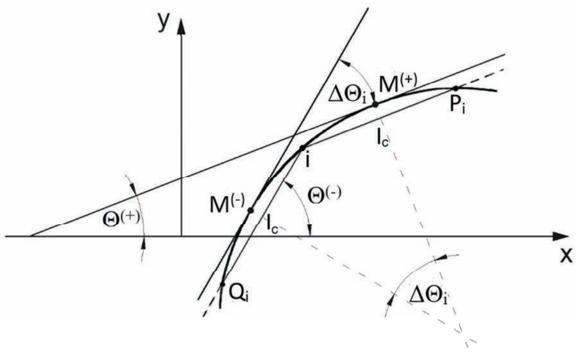
Projektowanie układu geometrycznego wymaga jednak operowania w kartezjańskim układzie współrzędnych. W wyniku tego procesu następuje wyznaczenie współrzędnych osi toru, pozwalających na jej wytyczenie w terenie. Określanie krzywizny danego układu geometrycznego jest więc utrudnione, gdyż bezpośrednie wykorzystanie wzorów z układu liniowego jest niemożliwe.

Ponadto z definicji krzywizny wynika konieczność operowania kątami nachylenia stycznej do układu geometrycznego. W przypadku dysponowania zapisem analitycznym danej krzywej nie stanowi to oczywiście żadnego problemu. Jednak w rzeczywistym, najczęściej zdeformowanym w wyniku eksploatacji torze kolejowym określenie występującego położenia prostych stycznych jest bardzo utrudnione. Natomiast zupełnie inaczej wygląda sytuacja w odniesieniu do rozciągniętych cięciw, których położenie jest zawsze jednoznacznie ustalone. Pojawiła się zatem koncepcja, żeby przy wyznaczaniu krzywizny toru nie operować stycznymi lecz odpowiadającymi cięciwami. Założono przy tym, że dla rozpatrywanych niewielkich odcinków toru styczne i odpowiadające cięciwy są do siebie równoległe, zaś punkty styczności rzutują się prostopadle na środek danej cięciwy. Metodę ruchomej cięciwy zaprezentowano po raz pierwszy w pracy [7]. Na rysunku **2** przedstawiono schemat ideowy wyznaczania krzywizny proponowaną metodą.

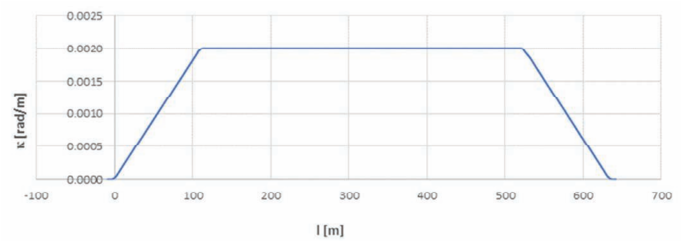
Krzywiznę $\kappa_i$ w danym punkcie toru wyznacza się z następującego wzoru:



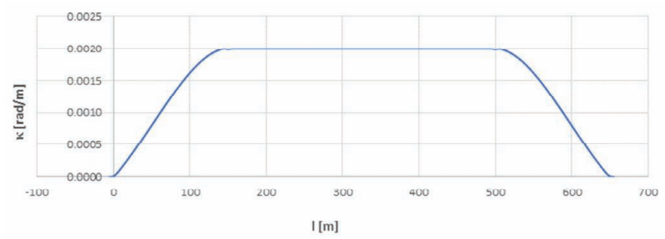

***1**. Schemat ideowy do wyjaśnienia pojęcia krzywizny*




***2**. Schemat ideowy metody ruchomej cięciwy*




*3. Wykresy rzędnych krzywizny κ(l) wyznaczonych metodą ruchomej cięciwy (R = 500 m, klotoida $l_k$ = 110 m, a = π/3 rad) [7]*




*4. Wykresy rzędnych krzywizny κ(l) wyznaczonych metodą ruchomej cięciwy (R = 500 m, nowa krzywa $l_k$ = 150 m, a = π/3 rad) [7]*

$$\kappa_i = \frac{\Delta\Theta_i}{l_c} \tag{4}$$

w którym $l_c$ oznacza długość cięciwy, zaś kąt $\Delta\Theta_i$ wynika z różnicy kątów nachylenia cięciw wyprowadzonych z punktu i do przodu i do tyłu, czyli

$$\Delta\Theta_i = \Theta_i^+ - \Theta_i^- \tag{5}$$

Stosowanie omawianej procedury wymaga dysponowania współrzędnymi danej krzywej w układzie kartezjańskim (zapisanej analitycznie lub w sposób dyskretny), bowiem wartości kątów $\Theta^+_i$ i $\Theta^-_i$ wynikają ze współczynników nachylenia prostych opisujących obydwie cięciwy.

## Weryfikacja metody na modelowym układzie geometrycznym

W pracy [7] przeprowadzono wstępną weryfikację metody ruchomej cięciwy na elementarnym układzie geometrycznym torów, złożonym z łuku kołowego i dwóch symetrycznie ustawionych krzywych przejściowych (tego samego rodzaju i tej samej długości). Uniwersalny zapis matematyczny takiego układu został przedstawiony w pracy [5]. W ramach weryfikacji zostały rozpatrzone cztery przypadki – po dwa dla prędkości 120 km/h i 100 km/h, przy czym zróżnicowano rodzaje zastosowanych krzywych przejściowych oraz kąty zwrotu trasy. Zastosowano dwa rodzaje krzywych przejściowych:

- powszechnie stosowaną krzywą w postaci klotoidy,
- nową krzywą przejściową, zaproponowaną w pracy [6].

Na tok postępowania składały się dwa zasadnicze etapy. W pierwszej kolejności wyznaczono współrzędne kolejnych punktów krzywej, oddalonych od siebie – w linii prostej – o wartość $l_c$ (tj. o długość cięciwy). Nie stanowiło to problemu dzięki dysponowaniu równaniami poszczególnych elementów geometrycznych. W ramach prowadzonej weryfikacji przyjęto $l_c$ = 5 m. W drugim etapie wyznaczono krzywiznę osi toru z wykorzystaniem wzorów (4) i (5). Zasadniczy wysiłek koncentrował się przy tym na określeniu wartości kątów $\Theta^+_i$ i $\Theta^-_i$. Na rysunku **3** przedstawiono przykładowy wykres krzywizny κ(*l*) wyznaczony metodą ruchomej cięciwy dla wybranego przypadku: promień łuku *R* = 500 m, krzywa przejściowa w postaci klotoidy o długości $l_k$ = 110 m, kąt zwrotu trasy *a* = π/3 rad .

Przeprowadzona weryfikacja w pełni potwierdziła poprawność zaproponowanej metody wyznaczania krzywizny osi toru. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach wykresy krzywizny wykazały całkowitą zgodność z wykresami stanowiącymi podstawę uzyskania odpowiadającego rozwiązania geometrycznego. Na długości łuku kołowego wartość krzywizny jest stała i dla nominalnego *R* = 500 m daje wartość występującego promienia równą 499,9979 m, niezależnie od rodzaju zastosowanej krzywej przejściowej. Natomiast dla nominalnego *R* = 800 m wynikająca z wyznaczonej krzywizny wartość promienia jest równa 799,9987 m, dla obydwu rodzajów krzywych przejściowych.

Jeśli chodzi o krzywe przejściowe, to uzyskano modelowy (tj. liniowy) przebieg krzywizny dla klotoidy (rys. **3**) oraz wyłagodzoną w rejonie końcowym krzywiznę dla nowej krzywej przejściowej (rys. **4**). W przypadku nowej krzywej występuje lokalnie pewne niewielkie zaburzenie w rejonie przejścia z krzywej przejściowej w łuk kołowy. Zaburzenie to można łatwo zredukować poprzez skrócenie cięciwy, jednak nie wydaje się to celowe z uwagi na utratę możliwości znalezienia granicy pomiędzy krzywą przejściową i łukiem kołowym (w przypadku klotoidy granicę tę stanowi punkt załomu odcinków prostych na wykresie krzywizny).

W pracy [8] podjęto dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi. Wpływ długości ruchomej cięciwy rozpatrywano – podobnie jak w pracy [7] – dla elementarnego układu geometrycznego wyznaczonego według zasad analitycznej metody projektowania [5]. Przyjęto kąt zwrotu trasy *a* = π/4 rad oraz prędkość jazdy pociągów *V* = 120 km/h (z której wynika promień łuku kołowego *R* = 800 m przy przechyłce na łuku *h* = 85 mm). Analizowane warianty wynikały z rodzaju zastosowanych krzywych przejściowych. Długości tych krzywych były zróżnicowane, wynikające z konieczności zachowania wartości dopuszczalnych odpowiednich parametrów kinematycznych. Przyjęto następujące rodzaje krzywych przejściowych:

- krzywą w postaci klotoidy o długości 105 m,

- krzywą Blossa o długości 150 m,
- nową krzywą przejściową [6] o długości 135 m.

W rozpatrywanych przypadkach wartości krzywizny zostały wyznaczone dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c$ = 5 m, 10 m i 20 m. Stwierdzono, że w każdym z wariantów wykresy rzędnych krzywizny pokrywają się ze sobą. Na rysunku **5** pokazano przykładowe wykresy uzyskane dla krzywej Blossa.

Oznacza to, że w zakresie $l_c = 5 \div 20$ m długość cięciwy nie odgrywa istotnej roli przy wyznaczaniu krzywizny i nie stwarza ograniczenia dla stosowania omawianej metody. Jednocześnie zwraca uwagę precyzja określenia charakteru krzywizny oraz zgodność z przebiegiem teoretycznym na krzywych przejściowych. Obie krzywe przejściowe w postaci klotoidy mają krzywiznę liniową, krzywe Blossa – krzywiznę w postaci litery S, zaś krzywe [6] – krzywiznę wygładzoną w rejonach końcowych. Stosunkowo niewielkie niezgodności rzędnych krzywizny występują jedynie w rejonach przejścia z odcinków prostych na krzywe przejściowe oraz z krzywych przejściowych na łuk kołowy.

Ponieważ – jak wykazano – wyznaczenie krzywizny na długości toru nie stanowi specjalnego problemu, pozostaje do wyjaśnienia kwestia lokalizacji miejsc połączenia elementów geometrycznych – odcinków prostych z krzywymi przejściowymi oraz krzywych przejściowych z łukami kołowymi. Może się to okazać szczególnie istotne z praktycznego punktu widzenia.

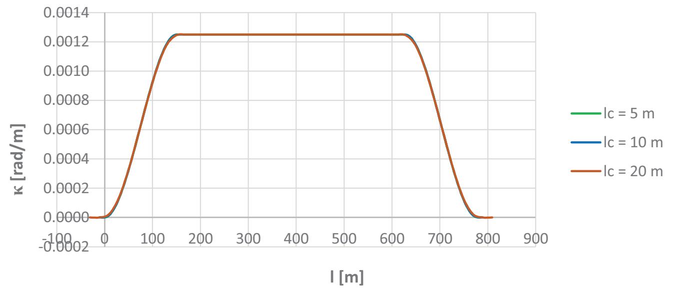
Przeprowadzona analiza wykazała, że w przypadku modelowych (teoretycznych) układów geometrycznych długa cięciwa ($l_c$ = 20 m) nie może być wykorzystywana do osiągnięcia zamierzonego celu. Cięciwa o długości $l_c$ = 5 m jest odpowiednia jedynie przy stosowaniu krzywej Blossa. Dla klotoidy i nowej krzywej należy zastosować cięciwę jeszcze krótszą, tj. $l_c$ = 2 m. Na rysunkach **6** i **7** przedstawiono odpowiednie wykresy krzywizny $\kappa(l)$ w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą przejściową w postaci klotoidy oraz w rejonie przejścia z tej krzywej na prostą. Kolorem czerwonym oznaczono krzywiznę teoretyczną.

Poszukiwana wartość odciętej punktu połączenia na rysunku **6** wynosi $l$ = 628,3185 m, a na rysunku **7** – $l$ = 733,3185 m. Jak widać, cięciwa o długości $l_c$ = 2 m jest bliska uzyskania takich właśnie wartości. Z przeprowadzonej analizy wynika, że w metodzie ruchomej cięciwy określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi jest możliwe, przy czym wymagana długość cięciwy musi być dostosowana do rodzaju krzywej przejściowej.

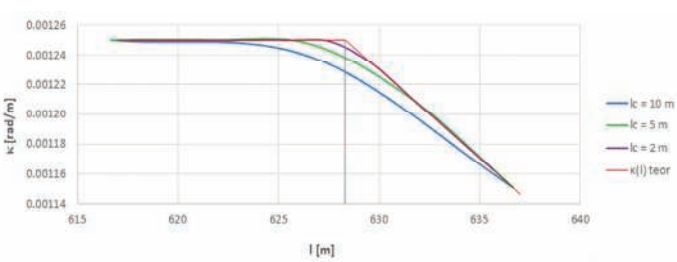
W pracy [9] wskazano na uniwersalność omawianej metody – możliwość stosowania w odniesieniu zarówno do płaszczyzny poziomej, jak też pionowej. Skupiono się na podstawach obliczeniowych, dotyczących kątów nachylenia ruchomej cięciwy. Analizę kątów nachylenia w płaszczyźnie poziomej przeprowadzono w układzie współrzędnych prostokątnych $x$, $y$, na elementarnym układzie geometrycznym torów, złożonym z łuku kołowego o promieniu 1000 m i dwóch symetrycznie ustawionych krzywych przejściowych w postaci klotoidy o długości 150 m. Przyjęcie wartości przechyłki $h_O$ = 105 mm pozwala na uzyskanie prędkości jazdy pociągów $V$ = 140 km/h. Rozpatrzono trzy przypadki szczególne, różniące się występującym kątem zwrotu trasy: $\alpha = \pi/8$ rad, $\pi/4$ rad i $\pi/2$ rad. W ramach prowadzonej analizy przyjęto długość cięciwy $l_c$ = 5 m.

Wartości krzywizny wynikają z różnicy kątów nachylenia cięciw wyprowadzonych z punktu $i$ – do przodu $\Theta^+_i$ i do tyłu $\Theta^-_i$. Na rysunku **8** pokazano wykresy obydwu tych kątów na długości rozpatrywanego układu geometrycznego dla kąta zwrotu trasy $\alpha = \pi/8$ rad. Wyraźnie widać, że na długości łuku kołowego (w środkowej części) utrzymuje się ustalona odległość pomiędzy obydwoma wykresami (czyli są one do siebie równoległe). Dzieląc stałą wartość różnicy kątów przez długość cięciwy, otrzymuje się stałą wartość krzywizny. Na długości krzywych przejściowych różnica kątów maleje do wartości zerowej na odcinkach prostych; w rozpatrywanym przypadku prowadzi to do uzyskania liniowej krzywizny.

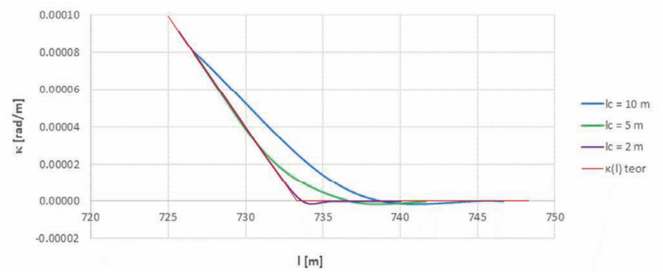
Jak stwierdzono, analogicznie kształtuje się sytuacja w przypadku kątów $\alpha = \pi/4$ rad i $\pi/2$ rad – wartości kątów nachylenia ruchomej cięciwy są tym większe im większe jest $\alpha$. W rozpatrywanych przypadkach rząd wielkości kątów $\Theta^+_i$ i $\Theta^-_i$ dla poszczególnych $\alpha$ różni się zdecydowanie (wynosi od 0,1 do 0,7 rad), jednak różnice odpowiednich kątów są takie same. Na łuku kołowym o promieniu 1000 m wynoszą one 0,005 rad, wy-



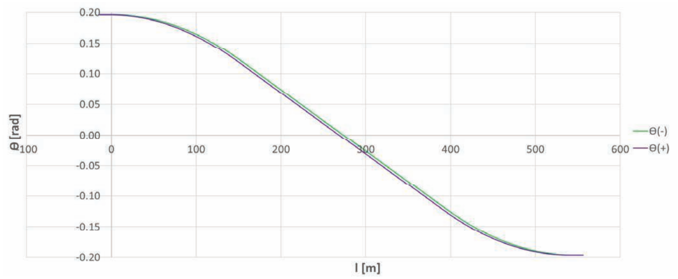

*5. Wykresy rzędnych krzywizny κ(l) dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c$ = 5 m, 10 m i 20 m ($\alpha = \pi/4$ rad, R = 800 m, krzywa Blossa $l_k$ = 150 m) [8]*




*6. Wykresy rzędnych krzywizny κ(l) w rejonie przejścia z łuku kołowego na krzywą przejściową w postaci klotoidy dla przyjętych długości ruchomej cięciwy $l_c$ = 2 m, 5 m i 10 m ($\alpha = \pi/4$ rad, R = 800 m, $l_k$ = 105 m) [8]*




*7. Wykresy rzędnych krzywizny κ(l) w rejonie przejścia z krzywej przejściowej w postaci klotoidy na prostą dla przyjętych długości ruchomej cięciwy lc = 2 m, 5 m i 10 m (α = π/4 rad, R = 800 m, $l_k$ = 105 m) [8]*




*8. Wykresy kątów nachylenia cięciw wyprowadzonych z punktu i – do przodu $\Theta^+_i$ i do tyłu $\Theta^-_i$ dla wybranego układu (promień łuku kołowego R = 1000 m, krzywe przejściowe w postaci klotoidy o długości $l_k$ = 150 m, kąt zwrotu trasy α = π/8 rad) [9]*

znaczając krzywizną równą 0,001 rad/m. Tak więc, dla łuku kołowego w płaszczyźnie poziomej wartości kątów nachylenia ruchomej cięciwy zależą od promienia łuku i kąta zwrotu trasy, natomiast różnica kątów nachylenia jest uzależniona wyłącznie od promienia łuku.

Z formalnego punktu widzenia nic nie stoi na przeszkodzie, żeby metoda ruchomej cięciwy mogła być stosowana również do wyznaczania krzywizny pionowej. Analizę kątów nachylenia ruchomej cięciwy w płaszczyźnie pionowej przeprowadzono na układzie geometrycznym złożonym z dwóch symetrycznie ustawionych odcinków o jednostajnym pochyleniu równym 2,5‰ i łuku kołowego o promieniu 10000 m. Dysponując współrzędnymi poszczególnych punktów wyznaczających końce ruchomej cięciwy, dla każdego punktu i wyznaczono wartości kątów nachylenia obydwu stykających się cięciw. Na rysunku 9 przedstawiono uzyskany wykres rzędnych krzywizny pionowej $\kappa_v(l)$ wyznaczonych metodą ruchomej cięciwy o długości $l_c$ = 5 m.

Podobnie jak dla płaszczyzny poziomej, w centralnej części rysunku **9** (tj. na łuku kołowym) występuje całkowita zgodność z rozwiązaniem modelowym – krzywizna łuku kołowego jest wartością stałą, równą 0,0001 rad/m. W rejonach skrajnych występuje natomiast zmienność krzywizny, która jest niewątpliwie związana z długością przyjętej cięciwy. Dlatego też przeprowadzono odpowiednie obliczenia również dla cięciwy o długości 2 m, uzyskując radykalne skrócenie stref przejściowych.

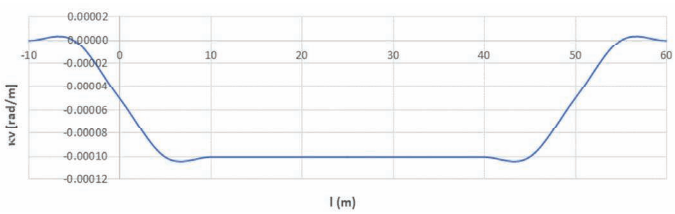
Wartości krzywizny pionowej wynikają z różnicy kątów nachylenia cięciw $\Theta^+_{vi}$ i $\Theta^-_{vi}$, wyprowadzonych z punktu *i*. Na rysunku **10** pokazano wykresy tych kątów na długości układu geometrycznego dla długości cięciwy $l_c$ = 5 m.

Jak widać, podobnie jak w przypadku płaszczyzny poziomej, na długości łuku kołowego utrzymuje się ustalona odległość pomiędzy obydwoma wykresami (na odcinkach skrajnych spada ona do zera). Dzieląc stałą wartość różnicy kątów, wynoszącą 0,0005 rad, przez długość cięciwy, otrzymuje się stałą wartość krzywizny łuku pionowego $\kappa_v$ = 0,0001 rad/m. Wartość różnicy kątów w płaszczyźnie poziomej dla takiej samej długości cięciwy wynosiła na łuku kołowym 0,005 rad.

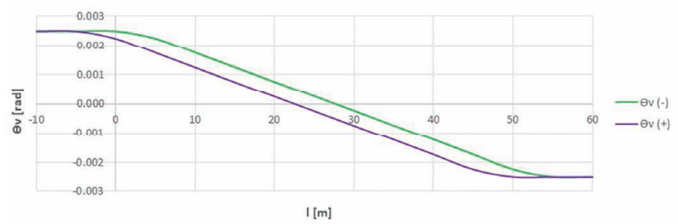
Podsumowując, należy stwierdzić, że analogicznie jak w płaszczyźnie poziomej promień łuku pionowego jest jedynym czynnikiem określającym wartość różnicy kątów nachylenia ruchomej cięciwy. Należy jednak wziąć pod uwagę, że w przypadku łuku kołowego w płaszczyźnie pionowej wartości kątów nachylenia ruchomej cięciwy są znacznie mniejsze niż ma to miejsce w płaszczyźnie poziomej, co jest związane z zakresem stosowanych promieni łuków.

## Określenie możliwości aplikacyjnych

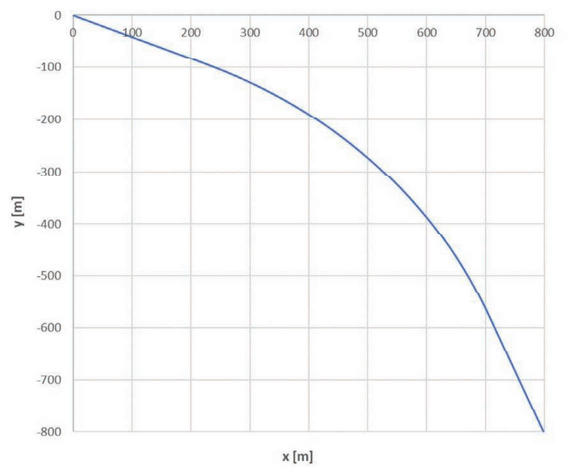
Przeprowadzona weryfikacja metody ruchomej cięciwy na modelowym układzie geometrycznym miała w gruncie rzeczy charakter poznawczy. Potwierdziła ona poprawność merytoryczną omawianej metody, jednak kluczową kwestią pozostaje jej wykorzystanie do wyznaczania poziomej krzywizny osi eksploatowanego toru kolejowego, na podstawie współrzędnych kartezjańskich uzyskanych na drodze przeprowadzonych pomiarów bezpośrednich. W pomiarach tych rozpatrujemy układ geometryczny o nieznanych charakterystykach i nie mamy możliwości operowania zapisem matematycznym. Zatem podstawowy problem dotyczyć tutaj będzie wyznaczania współrzędnych końców obydwu cięciw poprzez interpolację



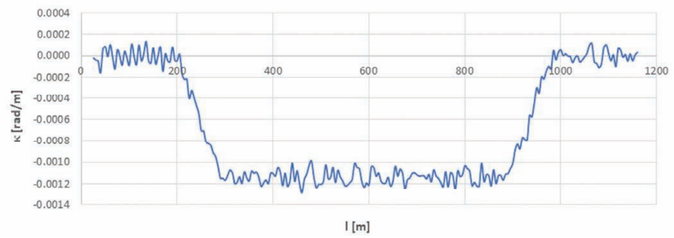

*9. Wykres krzywizny pionowej $\kappa_v(l)$ na długości układu geometrycznego złożonego z dwóch odcinków o jednostajnym pochyleniu równym 2,5‰ i łuku kołowego o promieniu 10000 m (długość cięciwy $l_c$ = 5 m) [9]*




*10. Wykresy kątów nachylenia cięciw w płaszczyźnie pionowej wyprowadzonych z punktu i – do przodu $\Theta^+_{vi}$ i do tyłu $\Theta^+_{vi}$ dla $l_c$ = 5 m (dwa symetrycznie ustawione odcinki o jednostajnym pochyleniu równym 2,5‰, promień łuku kołowego R = 10000 m) [9]*




*11. Przebieg trasy na rozpatrywanym odcinku testowym*




*12. Wykres krzywizny κ(l) na długości układu geometrycznego pokazanego na rysunku 11 uzyskany z wykorzystaniem metody ruchomej cięciwy ($l_c$ = 20 m)*

przeprowadzoną w odpowiednich przedziałach. Po określeniu kątów $\Theta^+_i$ i $\Theta^-_i$, wartości krzywizny – tak jak poprzednio – wyznacza się za pomocą wzorów (4) i (5). Cały tok postępowania ma charakter sekwencyjny i polega na wykorzystaniu odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Praktyczne wykorzystanie metody ruchomej cięciwy zostało zaprezentowane na przykładzie przeprowadzonej estymacji krzywizny dla odcinka testowego linii kolejowej o długości około 1200 m. Współrzędne kartezjańskie tego odcinka zostały wyznaczone w odstępach około 5 m, a maksymalny błąd tej operacji wyniósł ±25 mm.

Na rysunku **11** przedstawiono przebieg rozpatrywanej trasy w lokalnym układzie współrzędnych. Jak widać, występują na niej dwa odcinki proste oraz łuk kołowy (zapewne z krzywymi przejściowymi). Poza tym stwierdzeniem rysunek **11** niewiele nam mówi. Aby można było dokonać pełnej identyfikacji danego układu geometrycznego, należy wyznaczyć występującą krzywiznę osi toru (rys. **12**). Przyjęto długość ruchomej cięciwy $l_c$ = 20 m.

Uzyskany wykres krzywizny poziomej dla pomierzonego toru kolejowego różni się wyraźnie od wykresów dla układów modelowych, które zostały przedstawione w pracach [7-9]. Ma on charakter oscylacyjny, co wynika z występujących deformacji toru oraz błędu pomiarowego. Jak się jednak okazuje, z punktu widzenia praktycznego wykorzystania tego wykresu (do identyfikacji układu geometrycznego) nie ma to jednak znaczenia. Tak jak w przypadku układów modelowych, wykres κ(*l*) na rysunku **12** składa się z elementów dwojakiego rodzaju:

- odcinków oscylujących wokół przebiegu poziomego, które opisują krzywiznę o ustalonej wartości (równej zero na prostych odcinkach toru i niezerowej na łukach kołowych), oraz
- odcinków oscylujących wokół przebiegu liniowego (czyli prostych nachylonych do osi *l*), które opisują zmienną krzywiznę występującą na krzywych przejściowych.

Na podstawie tego wykresu można wyznaczyć wartość promienia łuku kołowego i długości krzywych przejściowych, a także lokalizację punktów charakterystycznych (leżących na połączeniach odcinków prostych z krzywymi przejściowymi oraz krzywych przejściowych z łukiem kołowym).

Przyjmuje się, że krzywizna toru na odcinkach prostych jest równa zeru, a występujące tam zaburzenia na wykresie krzywizny są wynikiem istniejących deformacji i błędu pomiarowego. Z zaznaczonego zakresu wartości krzywizny bezspornie należących do łuku kołowego jest wyznaczana średnia arytmetyczna $\overline{\kappa_{ŁK}}$ ; jej odwrotność określa wartość promienia:

$$R \cong \frac{1}{\overline{\kappa_{ŁK}}} \tag{6}$$

Uzyskaną za pomocą wzoru (6) wartość należy odpowiednio zaokrąglić (do pełnych metrów) i następnie wykorzystywać w dalszej procedurze obliczeniowej. W rozpatrywanym przypadku dla pierwszego łuku kołowego otrzymano średnią $\overline{\kappa_{ŁK}}$ = - 0,001136691 rad/m, co odpowiada wartości promienia *R* = 879,74625 m. Można więc przyjąć do dalszych obliczeń promień 880 m.

Po obu stronach łuku kołowego występują krzywe przejściowe. Przykładowo, na końcu prostej *P*1, położonej z lewej strony na rysunku **12**, znajduje się początek krzywej przejściowej *KP*1, łączącej tę prostą z łukiem kołowym. Z kolei na początku prostej *P*2 z prawej strony tegoż łuku, jest zlokalizowany początek krzywej przejściowej *KP*2. Końce obydwu krzywych, czyli punkty *KKP*1 i *KKP*2, wyznaczają – odpowiednio – początek i koniec łuku kołowego.

Aby wyznaczyć współrzędne liniowe wymienionych punktów charakterystycznych, należy określić współczynniki prostych najmniejszych kwadratów, opisujących rejony wykresu *k*(*l*) o zmiennych wartościach krzywizny. Proste najmniejszych kwadratów wyznaczają współrzędne liniowe ich punktów przecięcia z wykresami krzywizny na odcinkach prostych toru (gdzie krzywizna *k* = 0) i odcinkach łuku kołowego (gdzie krzywizna κ = $\overline{\kappa_{ŁK}}$ ).

Z wartości wyznaczonych współrzędnych $l_{PKP1}$ i $l_{KKP1}$ wynika w sposób bezpośredni długość krzywej przejściowej *KP*1.

$$l_{KP1} = l_{KKP1} - l_{PKP1} \tag{7}$$

Natomiast z wartości wyznaczonych współrzędnych $l_{PKP2}$ i $l_{KKP2}$ można określić długość krzywej przejściowej *KP*2.

$$l_{KP2} = l_{PKP2} - l_{KKP2} \tag{8}$$

Dane liczbowe wynikające ze wzorów (6) ÷ (8) oraz odpowiednie współrzędne kartezjańskie wyznaczonych punktów charakterystycznych w pełni identyfikują pomierzony układ geometryczny. Nowa metoda wyznaczania krzywizny w pełni tutaj potwierdza swoją przydatność. Występujące oscylacje na uzyskanym wykresie krzywizny nie przeszkadzają przy oszacowaniu podstawowych parametrów geometrycznych pomierzonego układu.

## Kwestia wykorzystania kąta kierunkowego trasy

Określane w ramach procedury wyznaczania krzywizny w punkcie pomiarowym *i* wartości kątów nachylenia obydwu – wyprowadzonych z tego punktu – wirtualnych cięciw do osi odciętych odpowiedniego układu współrzędnych prostokątnych można jednocześnie interpretować jako kąty kierunkowe trasy. Nie dotyczą one danego punktu pomiarowego, lecz punktów oddalonych od punktu *i* do przodu i do tyłu o wartość odpowiadającą połowie długości ruchomej cięciwy. Aby można było sporządzić wykresy zależności $\Theta(l)$ – osobno dla każdej cięciwy, należałoby wyznaczyć współrzędne liniowe tych punktów, co wymagałoby jednak przeprowadzenia dodatkowej procedury obliczeniowej.

Jednak jak się okazuje, problem ten można rozwiązać w znacznie prostszy sposób, wykorzystując kąty nachylenia obydwu cięciw. Kąty te pozwalają bowiem na bezpośrednie określenie kąta kierunkowego trasy w punkcie *i*, jako wartości ich średniej arytmetycznej.

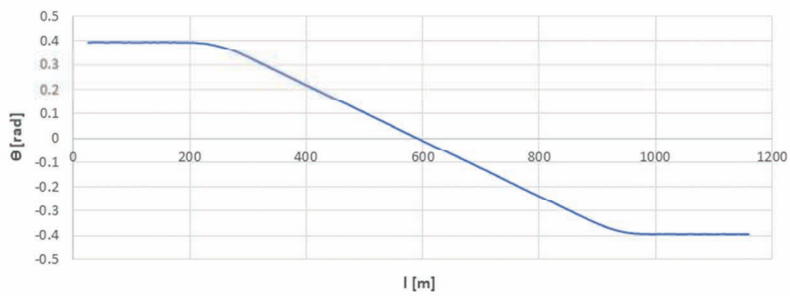
$$\Theta_i = \frac{\Theta_i^+ + \Theta_i^-}{2} \tag{9}$$

Można przyjąć, że kąt $\Theta_i$ jest jednocześnie kątem nachylenia stycznej do układu geometrycznego w danym punkcie pomiarowym. Gdyby był znany jego zapis analityczny w postaci funkcji $\Theta(l)$, można by było wyznaczyć krzywiznę ze wzoru (2). Ponieważ jednak na podstawie danych pomiarowych takiego zapisu nie da się w sposób ścisły wyznaczyć dla występujących na wykresie $\Theta(l)$ odcinków nieliniowych, trzeba ograniczyć wnioskowanie do rejonów, na których empiryczny wykres $\Theta(l)$ ma charakter liniowy. Odcinki poziome (gdzie wartość pochodnej jest zerowa) odpowiadają prostym odcinkom trasy, natomiast odcinki o ustalonym nachyleniu – łukom kołowym (na których pochodna jest wartością stałą i można z niej określić wartość promienia jako odwrotność występującej krzywizny).

Wykorzystując te same dane obliczeniowe co przy wyznaczaniu krzywizny (czyli wartości kątów $\Theta^+_i$ i $\Theta^-_i$), sporządzono wykres kąta kierunkowego trasy pokazanej na rysunku **11**, wyznaczonego za pomocą wzoru (10). Wykres ten został przedstawiony na rysunku **13**.

Wykres kąta kierunkowego na rysunku **13** potwierdza spostrzeżenia wynikające z wykresu krzywizny na rysunku **12**, dotyczące charakterystyki rozpatrywanego układu geometrycznego. Daje on ogólną orientację dotyczącą lokalizacji występujących odcinków prostych i łuków kołowych (gdzie wykres ma charakter liniowy). Nieokreślony (tj. nieliniowy) charakter wykresu na obydwu krzywych przejściowych sprawia, że nie jest możliwe określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi, co w danym przypadku stanowi kwestię kluczową. Taka sytuacja (oraz związana z tym nieznajomość długości krzywych przejściowych) powoduje, że wiarygodna identyfikacja układu geometrycznego okazuje się nieskuteczna. Przy wykorzystywaniu informacji wynikających z wykresu krzywizny (rys. **12**), sprawa wygląda zupełnie inaczej, zatem nie ma potrzeby, żeby promować wykorzystywanie podejścia nie w pełni wartościowego z punktu widzenia praktyki inżynierskiej.

Należy jeszcze wspomnieć, że ostatnio – w ramach prac naukowych – została podjęta próba wykorzystania wykresu kąta kierunkowego do wyznaczania krzywizny osi toru oraz – w konsekwencji – do identyfikacji układu geometrycznego. Estymacja krzywizny na krzywych przejściowych odbywa się tutaj w sposób przybliżony – albo przez numeryczne różniczkowanie nieliniowego fragmentu wykresu $\Theta(l)$, albo poprzez aproksymację punktów tego wykresu za pomocą funkcji kwadratowej (w celu uzyskania przewidywanej krzywizny liniowej). Oczywiście, nie ma przy tym możliwości precyzyjnego określenia położenia punktów granicznych, zatem przybliżony charakter mają również wyznaczone parametry geometryczne. Sporządzony na podstawie tych parametrów układ geometryczny nie pokryje się zatem z układem pomierzonym, a przecież zgodność układu modelowego z pomierzonym stanowi o poprawności zastosowanej metody identyfikacji osi toru.




***13**. Wykres kąta kierunkowego na długości układu geometrycznego pokazanego na rysunku 11, uzyskany z wykorzystaniem metody ruchomej cięciwy ($l_c$ = 20 m)*

## Podsumowanie

Wyznaczenie podstawowych parametrów geometrycznych trasy kolejowej w płaszczyźnie poziomej (tj. określanie położenia i długości odcinków prostych, położenia łuków kołowych wraz z określeniem ich promienia i długości oraz położenia krzywych przejściowych wraz z określeniem ich rodzaju i długości) odbywa się najczęściej na podstawie pomierzonych strzałek od cięciwy rozciągniętej wzdłuż toru. Linię odniesiona stanowią tutaj kierunki ustawienia cięciwy, które się stale zmieniają. Wykorzystywanie strzałek poziomych bierze się z braku metody bezpośredniego wyznaczania krzywizny osi toru.

Z definicji krzywizny wynika konieczność operowania kątami nachylenia stycznej do układu geometrycznego. W rzeczywistym, odtworzonym na drodze pomiarów torze kolejowym określenie występującego położenia prostych stycznych jest bardzo utrudnione. Pojawiła się zatem koncepcja, żeby przy wyznaczaniu krzywizny toru nie operować stycznymi lecz odpowiadającymi cięciwami. W ten sposób powstała idea nowej metody wyznaczania krzywizny osi toru, polegająca na wykorzystywaniu występującej w danym punkcie różnicy kątów nachylenia cięciwy o ustalonej długości

W niniejszej pracy przedstawiono podsumowanie dotychczasowych działań dotyczących weryfikacji zaproponowanej metody wyznaczania krzywizny (tzw. metody ruchomej cięciwy) na jednoznacznie zdefiniowanym modelowym układzie geometrycznym torów, wyznaczonym zgodnie z zasadami analitycznej metody projektowania [5]. Pokazano uzyskane wykresy krzywizny dla kilku rozpatrywanych przypadków, w których zróżnicowano prędkości jazdy pociągów, rodzaje zastosowanych krzywych przejściowych oraz kąty zwrotu trasy. Wyjaśniono kwestię lokalizacji miejsc połączenia elementów geometrycznych – odcinków prostych z krzywymi przejściowymi oraz krzywych przejściowych z łukami kołowymi, co może się okazać szczególnie istotne z praktycznego punktu widzenia. Skupiono się także na podstawach obliczeniowych omawianej metody, dotyczących kątów nachylenia ruchomej cięciwy. Wskazano również na jej uniwersalność – możliwość stosowania w odniesieniu zarówno do płaszczyzny poziomej, jak też pionowej. Przeprowadzona analiza wykazała pełną zgodność uzyskanych wykresów krzywizny z wykresami stanowiącymi podstawę uzyskania odpowiadającego rozwiązania geometrycznego. Dotyczyło to zarówno odcinków łuku kołowego, jak też rejonów krzywych przejściowych.

Następnie podjęto kwestię kluczową – wykorzystania metody ruchomej cięciwy do wyznaczania poziomej krzywizny osi eksploatowanego toru kolejowego, na podstawie współrzędnych kartezjańskich uzyskanych na drodze przeprowadzonych pomiarów bezpośrednich. Stwierdzono, że wykresy krzywizny sporządzone na podstawie danych pomiarowych różnią się wyraźnie od wykresów dla układów modelowych – mają mniej regularny, oscylacyjny charakter, co wynika z występujących deformacji toru oraz błędu pomiarowego. Nie przeszkadza to jednak przy oszacowaniu podstawowych parametrów geometrycznych pomierzonego układu. Na podstawie wykresu krzywizny można wyznaczyć wartość promienia łuku kołowego i długości krzywych przejściowych, a także lokalizację punktów charakterystycznych. Nowa metoda wyznaczania krzywizny w pełni tutaj potwierdza swoją przydatność.

Ogólną orientację dotyczącą lokalizacji występujących odcinków prostych i łuków kołowych daje wykres kąta kierunkowego trasy, który może być łatwo określony w ramach procedury wyznaczania krzywizny. Jednak nieokreślony (tj. nieliniowy) charakter tego wykresu na krzywych przejściowych sprawia, że nie jest możliwe określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi (a więc również długości krzywych przejściowych). Taka sytuacja powoduje, że wiarygodna identyfikacja układu geometrycznego na podstawie kąta kierunkowego okazuje się nieskuteczna. Przy wykorzystywaniu informacji wynikających z wykresu krzywizny sprawa wygląda zupełnie inaczej, zatem nie ma potrzeby, żeby promować wykorzystywanie podejścia nie w pełni wartościowego z punktu widzenia praktyki inżynierskiej. ◀

## Materiały źródłowe


[1] British railway track design, construction and maintenance, 6th ed. London, UK: The Permanent Way Institution, 1993.

[2] CEN (European Committee for Standardization). Railway applications—Track—Track alignment design parameters—Track gauges 1435 mm and wider. Part 1: Plain line. EN 13803-1. Brussels, Belgium, 2010.

[3] DB (Deutsche Bahn). 883.2000 DB_REF-Festpunktfeld. Deutsche Bahn Netz AG, Berlin, Germany, 2016.

[4] FRA (Federal Railroad Administration). Code of federal regulations title 49 transportation. US Government Printing Office, Washington, DC, 2008.

[5] Koc W. Design of rail-track geometric systems by satellite measurement. Journal of Transportation Engineering, vol. 138, iss. 1, pp. 114-122, 2012, doi: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000303.

[6] Koc W. New transition curve adapted to railway operational requirements. Journal of Surveying Engineering, vol. 145, iss. 3, 04019009, 2019, doi: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000284

[7] Koc W. The method of determining horizontal curvature in geometrical layouts of railway track with the use of moving chord. Archives of Civil Engineering, vol.

66, no. 4, pp. 579-591, 2020, doi: 10.24425/ace.2020.135238.
[8] Koc W. Analiza skuteczności wyznaczania poziomej krzywizny osi toru z wykorzystaniem ruchomej cięciwy. Problemy Kolejnictwa – Railway Reports 2021, tom 65, z. 190, s. 15-24, 2021, doi: 10.36137/1902P.
[9] Koc W. Analysis of moving chord inclination angles when determining curvature of track axis. Current Journal of Applied Science and Technology, vol. 40, iss. 10, pp. 92-103, CJAST.68309, 2021, doi: 10.9734/CJAST/2021/v40i1031362.
[10] NR (Network Rail), NR/L3/TRK/0030 NR_Reinstatement of Absolute Track Geometry (WCRL Routes), iss. 1. London, UK: Network Rail, 2008.
[11] NSW (New South Wales). Standard: Railway Surveying, Version 1.0. T HR TR 13000 ST. Government (Transport for NSW), Sydney, Australia, 2016.
[12] ÖBB (Österreichische Bundesbahnen). Linienführung von Gleisen, B 50 – Oberbau – Technische Grundsätze. Teil 2. GB Fahrweg Technik, Wien, Austria, 2004.
[13] PKP (Polskie Koleje Państwowe). Standardy Techniczne – Szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do predkości Vmax ≤ 200 km/h (dla taboru konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem) – TOM I - DROGA SZYNOWA – Załącznik ST-T1_A6: Układy geometryczne torów. Warszawa: PKP Polskie Linie Kolejowe, 2018.
[14] SBB (Schweizerische Bundesbahnen). Ausführungsbestimmungen zur Eisenbahnver-ordnung, SR 742.141.11. Bern, Switzerland: Ministerium für Verkehr, 2016.
[15] Specht C., Koc W. Mobile satellite measurements in designing and exploitation of rail roads. Transportation Research Procedia, vol. 14, pp. 625-634, 2016, doi: 10.1016/j.trpro.2016.05.310.