

# Problem obliczania podłużnej siły krytycznej w szynach toru bezстыkowego

## The problem of calculating the longitudinal critical force in continuous welded rail track



**Danuta Bryja**

Dr hab. inż., prof. uczelni

Politechnika Wroclawska,  
Wydział Budownictwa Lądowego  
i Wodnego, Katedra Mechaniki  
Budowli i Inżynierii Miejskiej

danuta.bryja@pwr.edu.pl

**Streszczenie:** Tory bezстыkowe są coraz powszechniej stosowane w wielu krajach, są standardem na liniach kolejowych dużych prędkości. Zagrożeniem dla ich eksploatacji jest ryzyko wybożenia bocznego przy obciążeniu ściskającymi siłami termicznymi. W pracy opisano wybrane problemy związane z obliczaniem podłużnej siły krytycznej, przy której następuje wybożenie toru. Przedstawiono przegląd literatury z uwzględnieniem prac z ostatnich lat, które świadczą o tym, że zagadnienie wybożenia toru bezстыkowego jest nadal aktualnym tematem badań, a nabiera nowego znaczenia wobec postępujących zmian klimatycznych. Następnie uwagę skupiono na powszechnie znanym, historycznym wzorze na siłę krytyczną w torze bezстыkowym na podsypce. Wyprowadzono wzór analitycznie i oceniono jego przydatność odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy. Zaproponowano procedurę jego wykorzystania, bazującą na przedstawionych pierwowzorach nomogramów, które pozwalają na ustalenie siły termicznej w torze oraz przybliżoną kontrolę lub dobór podstawowych parametrów toru w aspekcie ryzyka wybożenia termicznego.

**Słowa kluczowe:** Tor bezстыkowy; Siła krytyczna

**Abstract:** Continuous welded rail (CWR) tracks are becoming increasingly popular in many countries and are standard on high-speed railway lines. A threat to the operation of ballasted CWR tracks is the risk of their lateral buckling when loaded with significant compressive thermal forces. The paper describes selected problems related to calculating the longitudinal critical force at which track buckling occurs. A review of the literature is presented, taking into account papers from recent years, which indicate that the issue of CWR track buckling is still a current research topic, and is gaining new importance in the face of ongoing climate changes. Then, attention is focused on the widely known, historical formula for the critical force in CWR track. The formula is derived analytically and its usefulness is assessed with reference to the current state of knowledge. A procedure for its use is proposed, based on the presented prototypes of nomograms which allow for determination of the thermal force in the track and approximate control or selection of basic track parameters in terms of the risk of thermal buckling.

**Keywords:** Continuous welded rail; Critical force

### Wprowadzenie

Po II wojnie światowej wprowadzono do klasycznej nawierzchni podsypkowej wiele istotnych ulepszeń. Zaczęto stosować podkłady strunobetonowe, cięższe i bardziej wytrzymałe szyny, innowacyjne przytwierdzenia sprężyste, a przede wszystkim wprowadzono tory bezстыkowe umożliwiające osiągnięcie wyższych prędkości eksploatacyjnych [1]. Obecnie tory bezстыkowe są powszechnie stosowane w wielu krajach, przede wszystkim wtedy, gdy nawierzchnia kolejowa ma spełniać wysokie wymagania eksploatacyjne. Są standardem na liniach kolejowych du-

żych prędkości.

Zbudowane z ciągłych szyn spawanych (ang. CWR – *continuous welded rails*) tory bezстыkowe mają wiele zalet w porównaniu z torem klasycznym. Ze względu na brak złączy szynowych, jakość geometrii toru jest zdecydowanie lepsza, poprawia się komfort jazdy (jazda jest spokojna i cicha), podczas przejazdu pociągu nie pojawiają się znaczne obciążenia dynamiczne generowane przez złącza szynowe. W efekcie zmniejsza się skala problemów eksploatacyjnych takich jak pogorszenie pionowej geometrii szyn, odkształcenia plastyczne główki szyny, niebezpieczne pęknięcia szyn, uszkodzenia

podkładów i przytwierdzeń, a to przekłada się na istotny spadek całkowitego kosztu cyklu życia (ang. LCC – *life cycle cost*) [2].

Połączenie szyn w ciągłe tory powoduje przy zmianach temperatury powstawanie w szynach naprężeń termicznych, na które nakładają się naprężenia spowodowane innymi siłami podłużnymi, np. siłami trakcyjnymi – hamowaniem i rozruchem pojazdów, pełzaniem podkładów (np. wskutek nierównomiernego zagęszczenia podsypki), czy oddziaływaniami elektromagnetycznymi prądów zwrotnych [1]–[3]. Nieprzestrzeganie zasad właściwego ułożenia, utrzyma-

nia i kontroli toru bezстыkowego może doprowadzić do pojawienia się dużych naprężeń wynikających z działania sił podłużnych. Zbyt duże siły rozciągające mogą doprowadzić do pęknięcia szyny, natomiast zbyt duże siły ściskające powodują ryzyko wybożenia toru, czyli utraty zachowawczej postaci równowagi. Możliwość wybożenia pod wpływem działania dużych sił ściskających, głównie sił termicznych, stanowi poważne zagrożenie bezpieczeństwa eksploatacji torów bezстыkowych.

Na rysunku 1 pokazano typową postać wybożenia toru w płaszczyźnie poziomej, z zaznaczeniem sił podłużnych ściskających szyny i sił oporu podsypki przeciwko poprzecznemu przesunięciu podkładów. Wybożenie następuje wówczas, gdy siły występujące w szynach pokonają opór podsypki i sztywność rusztu torowego. Zjawisko to jest zazwyczaj poprzedzone pojawieniem się deformacji poprzecznych w płaszczyźnie toru. Siłą krytyczną jest nazywana wartość sumy podłużnych sił ściskających działających w obu szynach toru, przy której następuje wybożenie [1]–[3].

Problem wyznaczania podłużnej siły krytycznej w aspekcie obciążeń termicznych był podejmowany w literaturze przez wielu autorów na przestrzeni wielu lat. Początkowo, w latach 1950 – 1995 przeprowadzano analizy problemu wybożenia toru bezстыkowego na płaskich modelach jednowymiarowych (belkowych) lub dwuwymiarowych (uwzględniających dodatkowo podkłady łączące szyny). W celu uwzględnienia oporów bocznych podsypki wprowadzano jednorodne podłoże liniowo-sprężyste. Ówczesne modele analityczne zawierały wiele uproszczeń, takich jak np. brak uwzględnienia wpływu nierównomierności rozkładu oporów bocznych podsypki wzdłuż toru, pominięcie odkształcalności systemów przytwierdzeń, zmian szerokości toru, różnic w tempe-

raturach neutralnych między dwiema szynami itp. Przegląd wybranych prac opublikowanych w tym okresie przedstawiono np. w pracy Lim'a i in. [4] z 2003 roku.

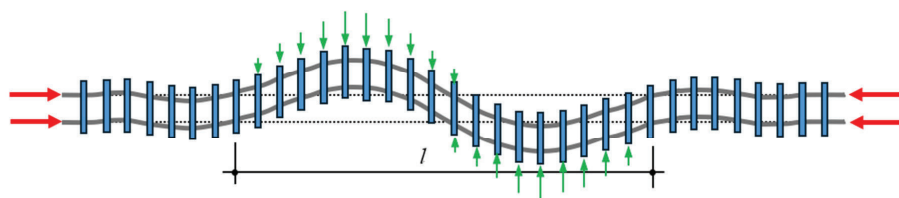
Po 2000 roku zaczęto powszechnie stosować zaawansowane modele trójwymiarowe bazujące na metodzie elementów skończonych, umożliwiające analizy przestrzennego stanu wybożenia toru. Przykładem są prace Lim'a i in. [4], [5], odpowiednio z 2003 i 2008 roku, w których na potrzeby takich analiz opracowano trójwymiarowy model MES uwzględniający wewnętrzną strukturę konstrukcyjną toru, w tym przytwierdzenia sprężyste, oraz dwa typy nieliniowości – nieliniowość materiałową podsypki i nieliniowość geometryczną szyn. Szyny modelowano cienkościennymi monosymetrycznymi elementami belkowymi o przekroju otwartym. W ostatnich kilkunastu latach, do przestrzennego modelowania toru i analiz różnych problemów związanych jego wybożeniem bocznym są częściej stosowane znane systemy obliczeniowe, jak np. ANSYS w pracy [6] czy ABAQUS w [7].

Wśród prac z ostatnich lat wyjątek stanowią prace Yang'a i Bradford'a [8], [9], w których autorzy powrócili do ciągłego modelu belkowego, ale zajęli się złożonym problemem analizy stanu powybożeniowego. Poprzez zaawansowane rozwiązania analityczne wykazali, że początkowa odpowiedź toru po wybożeniu jest w przypadku długich linii kolejowych niestabilna, pod wpływem wzrostu temperatury tor przesłakuje na inną ścieżkę równowagi, stan toru po wybożeniu charakteryzuje zlokalizowana postać wybożenia ze znacznym spadkiem ściskania w szynach, co obserwuje się w praktyce.

Jak stwierdził Towpik w monografii [1]: „Ze względu na to, że charakterystyki podłoża toru bezстыkowego, jak i ramy toru są nieliniowe, wiarygodna ocena stateczności, na przykład obliczenia kry-

tycznej siły ściskającej, nie jest praktycznie możliwa. Dlatego też proponowane są analityczno-doświadczalne sposoby określania krytycznej siły lub krytycznej temperatury, w której rozpoczyna się poprzeczny przesuw toru”. Należy tu dodać, że niezależnie od poziomu wyrafinowania przyjętej metody obliczeniowej, zasadniczy problem stanowi dobór realistycznych wartości parametrów potrzebnych do wykonania obliczeń. Im bardziej złożona jest metoda, tym trudniejsza jest prognoza zjawiska wybożenia i tym więcej parametrów wymaga szczegółowego określenia. Z tego też powodu, w publikacjach z okresu ostatnich 15 lat uwagę skupiono na badaniach wpływu różnych czynników na zjawisko wybożenia toru. Na przykład Miri i in. w [7] badali krytyczną wartość temperatury szyn, po której przekroczeniu następuje wybożenie, analizując wpływ dynamicznego obciążenia przejazdem pojazdu szynowego, przy czym rozważano różne scenariusze przejazdu, w tym przypadek hamowania pojazdu z defektami kół. W pracy [10] Miri i in. przedstawili rezultaty badań doświadczalnych oporu bocznego trzech typów podkładów betonowych, a następnie wykorzystali uzyskane wyniki w analizie numerycznej toru bezстыkowego pod obciążeniem temperaturowym, w celu określenia wpływu typu podkładów na temperaturę krytyczną wybożenia. Kolejnym przykładem publikacji na temat oporu poprzecznego podkładów betonowych (jeszcze bez analizy wpływu na zjawisko wybożenia) jest praca Chalabii i in. [11], w której na podstawie badań numerycznych oceniono udział powierzchni kontaktu podkładu z podsypką w formowaniu oporu poprzecznego.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu literatury warto wspomnieć o artykule Skarovej i in. [12], który ukazał się w 2022 roku w czasopiśmie *Energy Reports*, a wcześniej był przedstawiony na konferencji *Multi-CDT Conference on Clean Energy and Sustainable Infrastructure*, która odbyła się na Uniwersytecie w Sheffield. Autorzy przedstawili w tej pracy przegląd i ocenę czynników wpływających na temperaturę neu-



1. Typowa postać wybożenia toru (na podstawie [2])

tralną szyn (temperaturę, przy której w szynie nie występują naprężenia termiczne), od której istotnie zależą rzeczywiste siły termiczne w szynach toru bezстыkowego. Podkreślili ciekawy aspekt wpływu zmian klimatu na bezpieczeństwo eksploatacji torów bezстыkowych, stwierdzając, że globalne ocieplenie klimatu powoduje wyższe maksymalne temperatury letnie i większy zakres temperatur rocznych a stąd wyższe prawdopodobieństwo wybożenia szyn i wykolejenia pociągów pod wpływem obciążeń termicznych.

Aby wyjaśnić bliżej trudności związane z obliczaniem krytycznej siły termicznej w szynach toru bezстыkowego, w niniejszej pracy skupiono uwagę na powszechnie znanym, historycznym wzorze określającym siłę krytyczną [2]. Wyprowadzono ten wzór analitycznie i oceniono jego przydatność odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy. Przeprowadzono analizę wpływu podstawowych parametrów toru na siłę krytyczną i zaproponowano pierwotne nomogramy, które pozwalają na ustalenie siły termicznej w torze oraz przybliżoną kontrolę lub dobór podstawowych parametrów toru w aspekcie ryzyka wybożenia termicznego.

## Wyprowadzenie podstawowego wzoru na siłę krytyczną

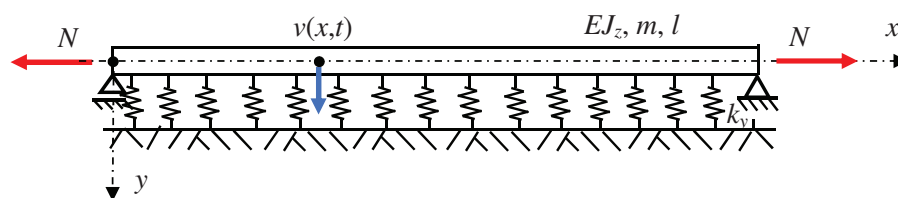
Podstawowy wzór na siłę krytyczną w zagadnieniu wybożenia toru bezстыkowego dotyczy toru idealnie prostego, modelowanego nieskończonej długości belką Eulera-Bernoulliego, opartą na podłożu liniowo-sprężystym (Winklera), którego reakcja reprezentuje opory boczne podsypki. Belka jest obciążona siłami ściskającymi  $P$ . Wzór na siłę krytyczną w torze modelowanym belką nieskończonej długości można wyprowadzić różnymi metodami. Tu zostanie przedstawiona metoda składająca się z dwóch kroków. Pierwszym krokiem jest rozwiązanie zadania podstawowego polegającego na wyznaczeniu siły krytycznej dla fragmentu toru, który ma skończoną długość  $l$  równą nieznannej długości fali wybożenia (rys. 1). W kroku drugim wyznacza się krytyczną

wartość długości  $l$  i na jej podstawie poszukiwaną siłę krytyczną dla toru modelowanego belką nieskończonej długości.

Do rozwiązania zadania podstawowego zastosowano oryginalne podejście bazujące na obliczeniu takiej częstotliwości drgań własnych wybranego fragmentu toru, której towarzyszy forma własna o kształcie typowym dla wybożenia toru bezстыkowego (rys. 1). Utrata zachowawczej postaci równowagi następuje wtedy, gdy częstotliwość własna jest równa zeru, co daje warunek, z którego wyznacza się siłę krytyczną.

### Zadanie podstawowe

W celu wyprowadzenia wzoru na siłę krytyczną rozważymy najpierw w zakresie drgań własnych problem poziomych drgań giętych belki modelującej fragment toru o skończonej długości  $l$ . Schemat dynamiczny belki jest pokazany na rysunku 2. Belka opiera się na podłożu liniowo-sprężystym Winklera o współczynniku sprężystości  $k_y$ , przy czym indeks  $y$  wskazuje tu kierunek działania podłoża – poziomy, poprzeczny do osi toru. Podłoże sprężyste reprezentuje uciążlone, poziome podparcie toru poprzez podkłady zanurzone w podsypce, zatem reakcja podłoża opisuje opory boczne podsypki przeciwdziałające przesunięciu rusztu torowego. Końce belki są swobodnie podparte, aby zapewnić zgodność formy jej drgań własnych z poszukiwaną formą wybożenia toru. Sztywność belki  $EJ_z$  jest uśrednioną sztywnością giętą ramy toru (rusztu torowego), przy zginaniu w płaszczyźnie poziomej  $xy$ . Podobnie masa jednostkowa belki  $m$  jest uśrednioną masą ramy toru. Belka jest poddana działaniu niezmiennego w czasie obciążenia siłami podłużnymi  $N$ , które powodują statyczny stan napięć osiowych i są dodatnie przy rozciąganiu zgodnie z definicją sił osiowych.



2. Schemat dynamiczny belki, która modeluje w płaszczyźnie poziomej fragment toru o długości  $l$

Przestrzenno-czasowy rozkład przemieszczeń poprzecznych belki opisuje funkcja  $v(x, t)$ . Nie wnikając w postać równania drgań własnych, poszukiwać będziemy tylko jednej częstotliwości własnej ze zbioru częstotliwości drgań własnych belki, tj. częstotliwości, której odpowiada forma własna o kształcie podobnym do typowej formy wybożenia toru bezстыkowego. Do wyznaczenia tego rozwiązania zastosujemy metodę aproksymacyjną, zakładając z góry następującą postać funkcji rozkładu przemieszczeń belki

$$v(x, t) = f(x)q(t) = \sin \frac{2\pi x}{l} q(t) \quad (1)$$

gdzie  $q(t)$  jest nieznaną funkcją czasu a  $f(x)$  typową dla toru kolejowego formą wybożenia, aproksymowaną funkcją sinusową  $\sin(2\pi x/l)$ , która spełnia warunki kinematyczne na brzegach.

Jak wykazano w monografii Langer [13], funkcja  $f(x) = \sin(2\pi x/l)$  jest drugą formą drgań własnych rozważanej belki. Odpowiadającą jej częstotliwość własną można wyznaczyć jak dla układu o jednym dynamicznym stopniu swobody, wyznaczając na podstawie bilansu energii masę główną i sztywność główną belki, towarzyszące założonej formie drgań własnych  $f(x)$ . Energia kinetyczna ruchu masy belki i energia potencjalna odkształcenia, po podstawieniu (1) wynoszą

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} m \int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{ml}{4\pi} \right) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \tilde{m} \dot{q}^2 \quad (2)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N v'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_y v^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z \frac{(2\pi)^4}{l^4} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx \cdot q^2 + \frac{1}{2} \int_0^l N \frac{(2\pi)^2}{l^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx \cdot q^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l k_y \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx \cdot q^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( EJ_z \frac{(2\pi)^3}{2l^3} + N \frac{2\pi}{2l} + k_y \frac{l}{4\pi} \right) q^2 = \frac{1}{2} \tilde{k} q^2 \quad (3)$$

gdzie oznaczono  $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial x}$

oraz uwzględniono,

$$\text{że } \int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{l}{2\pi^2} \frac{1}{2} \quad \text{i podobnie}$$

$$\int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{l}{2\pi^2} \frac{1}{2}.$$

Częstość własna odpowiadająca założonej formie drgań własnych jest wyrażona wzorem

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{4\pi}{ml} \left( EJ_z \frac{4\pi^3}{l^3} + N \frac{\pi}{l} + k_y \frac{l}{4\pi} \right)} \quad (4)$$

który można zapisać w innej postaci, łatwiejszej do interpretacji

$$\omega = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{ml^4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{Nl^2}{4\pi^2 EJ_z} + \frac{k_y l^4}{16\pi^4 EJ_z}} \quad (5)$$

Łatwo zauważyć, że mnożnik  $4\pi^2 \sqrt{EJ_z / (ml^4)}$  jest drugą częstością własną belki swobodnie podpartej, która nie opiera się na podłożu sprężystym i nie jest poddana działaniu stałych sił podłużnych. Wobec tego, że wzoru (5) wprost wynika, że zarówno podłożo sprężyste jak i siła osiowa rozciągająca (dodatnia) zwiększają częstość własną belki, bo rośnie jej sztywność. Natomiast siła osiowa ściskająca (ujemna) powoduje obniżenie częstości. Bardzo duża siła ściskająca może doprowadzić do sytuacji, gdy częstość własna jest zerowa, co jest równoznaczne z utratą zachowawczej postaci równowagi. Ze wzoru (5) wynika, że

$$\omega = 0 \quad \text{gdy} \quad 1 + \frac{Nl^2}{4\pi^2 EJ_z} + \frac{k_y l^4}{16\pi^4 EJ_z} = 0 \quad (6)$$

a stąd otrzymuje się formułę

$$N = -4\pi^2 \frac{EJ_z}{l^2} - \frac{k_y l^2}{4\pi^2} \quad (7)$$

Wprowadzenie oznaczenia  $P = -N$  prowadzi do wzoru

$$P = 4\pi^2 \frac{EJ_z}{l^2} + \frac{k_y l^2}{4\pi^2} \quad (8)$$

który określa krytyczną wartość siły ściskającej, przy której następuje wyboczenie belki pokazanej na rysunku 2, mające formę typową dla wyboczenia toru bezстыkowego.

## Wyznaczenie siły krytycznej dla belki nieskończenie długiej

Wzór (8) dotyczy belki modelującej fragment toru bezстыkowego, którego długość  $l$  jest równa nieznannej długości fali wyboczenia (rys. 1). Określa on równocześnie związek między obciążeniem toru podłużną siłą ściskającą  $P$  i długością  $l$ . Na rysunku 3 pokazano przykładowe wykresy tej zależności, sporządzone przy różnych wartościach współczynnika sprężystości podłoża  $k_y$ . Do obliczeń przyjęto  $EJ_z = 8000 \text{ kNm}^2$  na podstawie monografii [2], zakres siły  $P$  ograniczono do 3000 kN a długość  $l$  do 100 m. Dla porównania, na rysunku pokazano też wykres dotyczący przypadku  $k_y = 0$ , w którym wzór (8) sprowadza się do postaci  $P = 4\pi^2 EJ_z / l^2$  określającej drugą siłę krytyczną Eulera dla belki swobodnie podpartej.

Jak widać na rysunku 3, fakt istnienia podłoża sprężystego powoduje istotną zmianę kształtu krzywej obrazującej funkcję  $P(l)$ , która określa relację między siłą ściskającą  $P$  i długością  $l$ . Jeśli  $k_y \neq 0$ , to funkcje  $P(l)$  początkowo maleją ze wzrostem poszukiwanej długości fali wyboczeniowej, osiągając minimum

i następnie rosną osiągając wartości, które są już nierealistyczne jeśli mamy na myśli siły termiczne wynikające ze zmian temperatury szyn. Siłą krytyczną powodującą wyboczenie toru jest siła najmniejsza, czyli minimum funkcji  $P(l)$ . Miejsce występowania tego minimum, czyli faktyczną długość fali wyboczenia  $l_{kryt}$  znajdziemy z warunku zerowania się pochodnej funkcji  $P(l)$

$$\frac{dP}{dl} = -8\pi^2 EJ_z \frac{1}{l^3} + \frac{k_y l}{2\pi^2} = 0 \rightarrow l_{kryt}^2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{k_y}} \quad (9)$$

a stąd otrzymuje się

$$P_{kryt} = 4\pi^2 \frac{EJ_z}{l_{kryt}^2} + \frac{k_y l_{kryt}^2}{4\pi^2} =$$

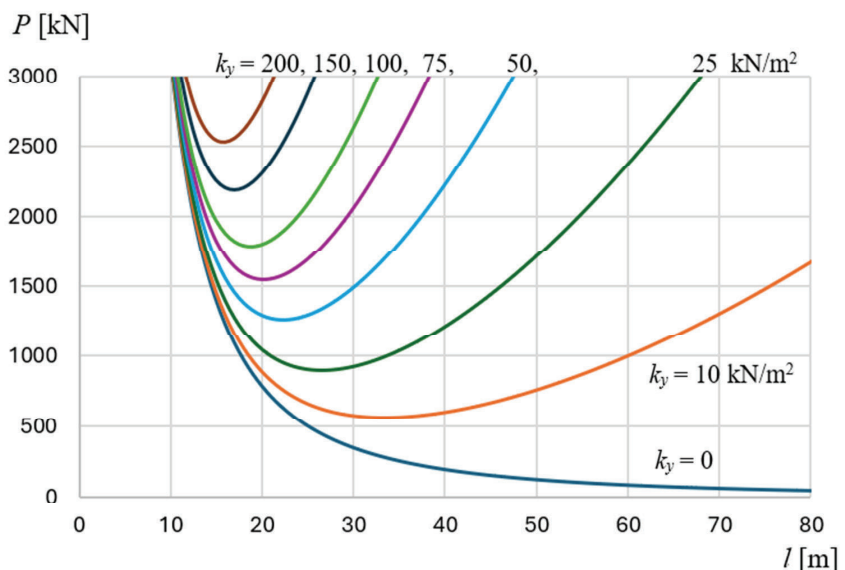
$$= 4\pi^2 EJ_z \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k_y}{EJ_z}} + \frac{k_y}{4\pi^2} 4\pi^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{k_y}} \quad (10)$$

czyli

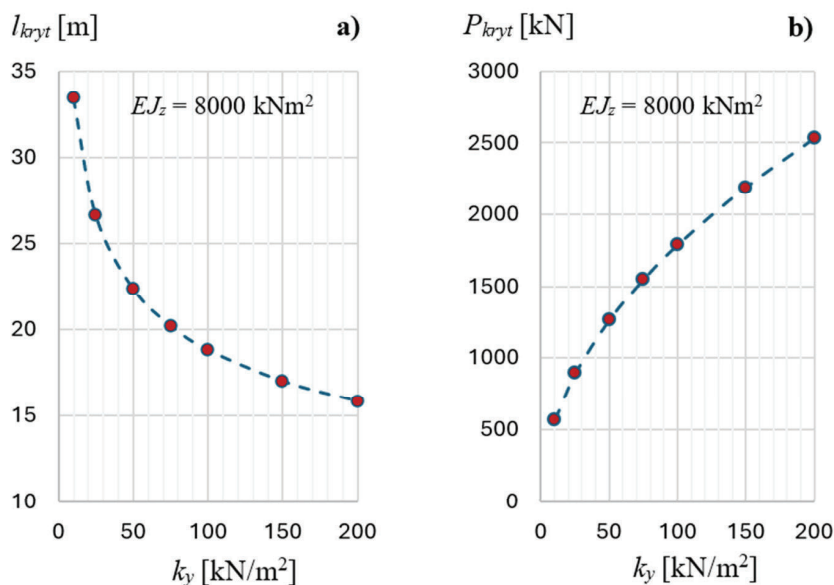
$$P_{kryt} = 2\sqrt{EJ_z k_y} \quad (11)$$

Wzór (11) określa poszukiwaną wartość krytyczną siły podłużnej ściskającej tor bezстыkowy modelowany nieskończenie długą belką Eulera-Bernoulliego opartą na podłożu sprężystym Winklera. Na rysunku 4 pokazano zależność krytycznej długości fali wyboczenia i siły krytycznej od współczynnika sprężystości podłoża, które idealizuje opory boczne podsypki. Obliczenia wykonano na podstawie relacji (9) i (11), przyjmując  $EJ_z = 8000 \text{ kNm}^2$ .

Po przekroczeniu siły krytycznej następuje wyboczenie sprężyste toru w



3. Zależność siły podłużnej ściskającej tor od założonej długości fali wyboczenia



4. Zależność krytycznej długości fali wybożenia (rys. 4a) i siły krytycznej (rys. 4b) od współczynnika sprężystości podłoża

płaszczyźnie poziomej. Stateczność toru jest zachowana, gdy  $P < P_{kryt}$ , co prowadzi do następującego ograniczenia nałożonego na łączną siłę termiczną  $P_T$  powodującą ścisnienie toru (obu szyn)

$$P_T = 2EA\alpha\Delta T < 2\sqrt{EJ_z k_y} \quad (12)$$

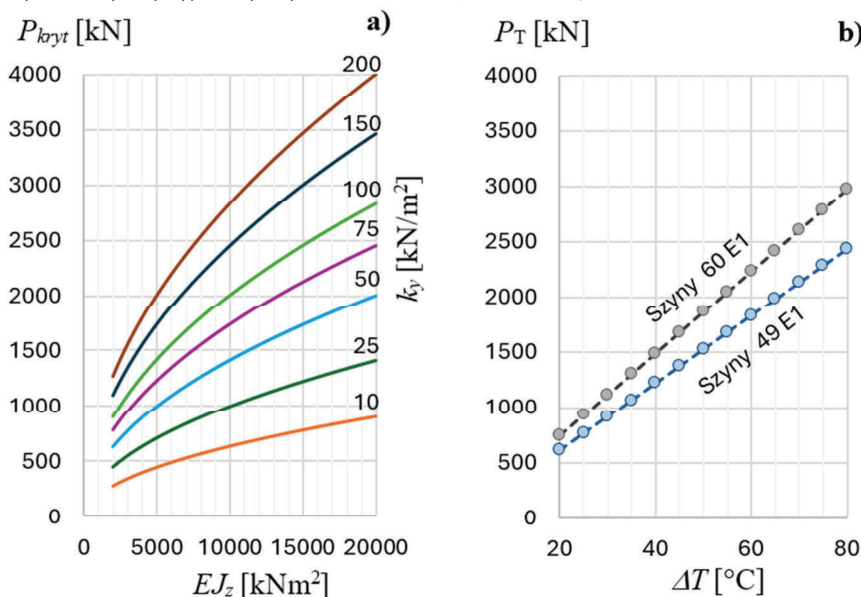
gdzie  $EA$  jest sztywnością osiową jednej szyny,  $\alpha$  współczynnikiem rozszerzalności termicznej stali a  $\Delta T = T - T_N$  dodatnim przyrostem temperatury szyny mierzonym względem temperatury neutralnej  $T_N$  (tj. takiej, przy której nie występują w szynie naprężenia termiczne). Na podstawie warunku (12) można wyznaczyć graniczny przyrost temperatury szyny, który wynosi

$$\Delta T_{gr} = \frac{1}{EA\alpha} \sqrt{EJ_z k_y} \quad (13)$$

przy czym należy pamiętać, że  $EA$  jest tu sztywnością osiową jednej szyny a wartość sztywności giętej  $EJ_z$  powinna odnosić się całej ramy toru.

## Analiza uzyskanych rozwiązań

Wyniki obliczeń pokazane na rysunku 4 wskazują jednoznacznie, że opory boczne podsypki bardzo istotnie wpływają na podłużną siłę krytyczną, która powoduje wybożenie. Podobny udział w kształtowaniu wartości siły krytycznej ma pozioma sztywność giętna ramy toru, co można zauważyć



5. Zależność siły krytycznej od poziomej sztywności giętej ramy toru (rys. 5a) i zależność łącznej siły termicznej w szynach od przyrostu temperatury (rys. 5b)

analizując wykresy przedstawione na rysunku 5a. Ten fakt wynika bezpośrednio z analizy wzoru (11). Przykładowo, dwukrotny wzrost siły krytycznej można uzyskać zwiększając czterokrotnie sztywność podłoża sprężystego  $k_y$  lub sztywność giętną ramy toru  $EJ_z$  albo zwiększając dwukrotnie oba te parametry.

Wzór (11) na podłużną siłę krytyczną wydaje się bardzo łatwy w praktycznym stosowaniu, jednak tak nie jest. Trudno jest bowiem wiarygodnie oszacować wartości parametrów  $EJ_z$  i  $k_y$  przyjętego belkowego modelu toru. W rzeczywistości sztywność giętna ramy toru nie jest stała, jak przyjęto w modelu belkowym, zmienia się okresowo na długości toru w rytmie rozstawu podkładów. Ponadto, przytwierdzenia w węzłach rusztu torowego są w pewnym stopniu odkształcalne skrętnie, co wpływa na sztywność giętną w płaszczyźnie poziomej. Te trudności można pokonać budując bliższy rzeczywistości model numeryczny rusztu torowego, a następnie wyznaczając na jego podstawie funkcję określającą zmienną sztywność zastępczej belki. Kolejnym krokiem byłaby odpowiednia modyfikacja rozwiązania zadania podstawowego lub w prostszym przypadku – uśrednienie sztywności giętej na długości belki.

Zdecydowanie większy problem stanowi oszacowanie sztywności podłoża sprężystego, na którym opiera się belka modelująca tor, ponieważ już przyjęte na wstępie założenie o podłożu liniowo-sprężystym Winklera znacznie odbiega od rzeczywistości. W ciągłym modelowaniu analitycznym bardzo trudno jest uwzględnić w sposób wiarygodny interakcję między podkładami a podsypką, w tym tarcie powierzchni kontaktowych podkładu o podsypkę, które znacząco wpływa na siły oporu bocznego. Pewną próbę takiego podejścia pokazano w pracy [9] z 2016 roku, w której wprowadzono do analitycznego opisu wybożenia quasi-empiryczną funkcję opisującą opory boczne, bazującą na wynikach badań polowych przeprowadzonych przez innych autorów (np. Donley i Kerr [14]). W trójwymiarowych modelach MES

powszechnie jest stosowane podejście dyskretne polegające na wprowadzeniu więzi sprężysto-plastycznych [11] lub więzi sprężystych nieliniowych [5] w założonych punktach kontaktu podkładów kolejowych z podsypką. Oba te podejścia – ciągłe analityczne oraz dyskretne MES skutkują pojawieniem się nowych parametrów, które w praktyce jest trudno oszacować podobnie jak uogólnione parametry modelu belkowego  $EJ_z$  i  $k_y$ .

Biorąc powyższe pod uwagę można uznać, że wykorzystanie stosunkowo prostego, podstawowego wzoru analitycznego (11) w szacowaniu ryzyka wybożenia toru ma jednak pewne przewagi. Otrzymuje się w wyniku konserwatywne, bezpieczne rozwiązanie, a prostota wzoru umożliwia łatwe wyznaczenie prostych w użyciu nomogramów, których pierwowzorem mogą być wykresy pokazane na rysunkach **5a** i **5b**. Zestawienie tych rysunków pozwala:

- ustalić poziom łącznej siły termicznej w szynach, który odpowiada prognozowanemu przyrostowi temperatury (na podstawie rys. **5b**),
- ocenić w przybliżeniu jakie powinny być bezpieczne wartości podstawowych parametrów toru, aby nie dopuścić do wybożenia termicznego (na podstawie rys. **5a**).

Oczywiście taką uproszczoną procedurę można doskonalić, np. dołączając do niej np. metodę obliczania i uśredniania zmiennej sztywności rusztu torowego przy zginaniu w płaszczyźnie poziomej i podając przybliżone zakresy uśrednionej sztywności podłoża sprężystego, wyznaczone na podstawie wyników badań eksperymentalnych obejmujących różne rodzaje podsypki i podkładów.

## Podsumowanie

W pracy opisano wybrane problemy związane z obliczaniem podłużnej siły krytycznej w zagadnieniu wybożenia toru w płaszczyźnie poziomej. Przedstawiono przegląd literatury z uwzględnieniem prac z ostatnich lat,

które świadczą o tym, że zagadnienie wybożenia toru bezстыkowego jest nadal aktualnym tematem badań, a nabiera nowego znaczenia wobec zachodzących zmian klimatycznych. Postępujące ocieplenie klimatu sprawia, że rośnie ryzyko wybożenia termicznego torów bezстыkowych, coraz powszechniej obecnie stosowanych. W tym aspekcie należałoby się zastanowić, czy nadal aktualne jest zalecenie przytwierdzenia szyn w przedziale temperatur od +15°C do +30°C, odpowiadające przyjętym w Polsce warunkom klimatycznym, według których temperatura szyn może zmieniać się od -30°C do +60°C ([1]).

Rozważając w pracy problem wybożenia szyn toru bezстыkowego, skupiono uwagę na analitycznym wprowadzeniu powszechnie znanego, historycznego wzoru na siłę krytyczną. Oceniono przydatność tego wzoru odnosząc się do aktualnego stanu wiedzy. Zaproponowano uproszczoną procedurę jego wykorzystania, przedstawiając pierwowzory nomogramów pozwalających na ustalenie siły termicznej w torze i przybliżoną kontrolę lub dobór podstawowych parametrów toru w aspekcie ryzyka wybożenia termicznego. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] Towpik K., Infrastruktura drogi kolejowej. Obciążenia i trwałość nawierzchni, monograficzna seria wydawnicza Biblioteki Problemów Eksploatacji, Politechnika Warszawska, Warszawa – Radom 2006.
- [2] Esveld C., Modern railway track, MRT-Productions, The Netherlands, 2014.
- [3] Towpik K., Infrastruktura transportu szynowego, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2017.
- [4] Lim N-H., Park N-H., Kang Y-J., Stability of continuous welded rail track, Computers & Structures, Vol. 81 (No. 22–23), 2003, 2219–2236.
- [5] Lim N-H., Han S-Y., Han T-H., Kang Y-J., Parametric study on stability of continuous welded rail track - ballast resistance and track irregu-

larity, Steel Structures, Vol. 8, 2008, 171–181.

- [6] Carvalho J., Delgado J., Calçada R., Delgado R., A new methodology for evaluating the safe temperature in continuous welded rail tracks, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 13 (No. 02), 2013, 1350016.
- [7] Miri A., Dhanasekar M., Thambiratnam D., Weston B., Chan T.H.T., Analysis of buckling failure in continuously welded railway tracks, Engineering Failure Analysis, Vol. 119, 2021, 104989.
- [8] Yang G., Bradford M.A., Antisymmetric postbuckling localisation of an infinite column on a non-linear foundation with softening, IJSSD Symposium on Progress in Structural Stability and Dynamics, Lisbon, Portugal, July 22–24, 2015.
- [9] Yang G., Bradford M.A., Thermal-induced buckling and postbuckling analysis of continuous railway tracks, International Journal of Solids and Structures, Vol. 97–98, 2016, 637–649.
- [10] Miri A., Zakeri J.A., Thambiratnam D., Chan T.H.T., Effect of shape of concrete sleepers for mitigating of track buckling, Construction and Building Materials, Vol. 294(5), 2021, 123568.
- [11] Chalabii J., Rad M.M., Raisi E.H., Mehni R.E., Effect of Sleeper-Ballast Particle Contact on Lateral Resistance of Concrete Sleepers in Ballasted Railway Tracks, Materials (Basel), Vol. 15(21), 2022, 7508.
- [12] Skarova A., Harknessa J., Keillorb M., Milnea D., Powriea W., Review of factors affecting stress-free temperature in the continuous welded rail track, Energy Reports, Vol. 8, 2022, 107–113.
- [13] Langer J., Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [14] Donley M.G., Kerr A.D., Thermal buckling of curved railroad tracks, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 22, 1987, 175–192.