miesięcznik naukowo-techniczny stowarzyszenia inżynierów i techników komunikacji RP

przegląd komunikacyjny

11
2019
rocznik LXXIV
cena 25,00 zł
w tym 5% VAT

UKAZUJE SIĘ OD 1945 ROKU

Dynamika obiektów infrastruktury transportowej

eISSN
2544-6037

ISSN
0033-22-32

Dwustronna więź kontaktowa Hertz'a w numerycznej analizie drgań sprzężonego układu pociąg-tor. Odpowiedzi krótkich belek mostowych na przejazd pociągów szybkobieżnych. Układy dynamiczne w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich. Drgania płyty z wypełnieniem sprężystym spoczywającej na podłożu Winklera wywołane ruchomym oscylatorem. Zmiana więzów w linowych strukturach przegubowych

Podstawowe informacje dla Autorów artykułów

„Przegląd Komunikacyjny" publikuje artykuły związane z szeroko rozumianym transportem oraz infrastrukturą transportu. Obejmuje to zagadnienia techniczne, ekonomiczne i prawne. Akceptowane są także materiały związane z geografią, historią i socjologią transportu.

Artykuły publikowane w „Przeglądzie Komunikacyjnym" dzieli się na: „wnoszące wkład naukowy w dziedzinę transportu i infrastruktury transportu" oraz „pozostałe". Prosimy Autorów o deklarację (w zgłoszeniu), do której grupy zaliczyć ich prace.

Materiały do publikacji: zgłoszenie, artykuł oraz oświadczenie Autora, należy przesyłać w formie elektronicznej na adres redakcji:

artykuly@przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl

W zgłoszeniu należy podać: imię i nazwisko autora, adres mailowy oraz adres do tradycyjnej korespondencji, miejsce zatrudnienia, zdjęcie, tytuł artykułu oraz streszczenie (po polsku i po angielsku) i słowa kluczowe (po polsku i po angielsku). Szczegóły przygotowania materiałów oraz wzory załączników dostępne są ma stronie:

www.transportation.overview.pwr.edu.pl

W celu usprawnienia i przyspieszenia procesu publikacji prosimy o zastosowanie się do poniższych wymagań dotyczących nadsyłanego materiału:

1. Tekst artykułu powinien być napisany w jednym z ogólnodostępnych programów (np. Microsoft Word). Wzory i opisy wzorów powinny być wkomponowane w tekst. Tabele należy zestawić po zakończeniu tekstu. Ilustracje (rysunki, fotografie, wykresy) najlepiej dołączyć jako oddzielne pliki. Można je także wstawić do pliku z tekstem po zakończeniu tekstu. Możliwe jest oznaczenie miejsc w tekście, w których autor sugeruje wstawienie stosownej ilustracji lub tabeli. Obowiązuje odrębna numeracja ilustracji (bez rozróżniania na rysunki, fotografie itp.) oraz tabel.
2. Całość materiału nie powinna przekraczać 12 stron w formacie Word (zalecane jest 8 stron). Do limitu stron wlicza się ilustracje załączane w odrębnych plikach (przy założeniu że 1 ilustracja = ½ strony).
3. Format tekstu powinien być jak najprostszy (nie stosować zróżnicowanych styli, wcięć, podwójnych i wielokrotnych spacji itp.). Dopuszczalne jest pogrubienie, podkreślenie i oznaczenie kursywą istotnych części tekstu, a także indeksy górne i dolne. **Nie stosować przypisów.**
4. Nawiązania do pozycji zewnętrznych - cytaty (dotyczy również podpisów ilustracji i tabel) oznacza się numeracją w nawiasach kwadratowych [...]. Numerację należy zestawić na końcu artykułu (jako „Materiały źródłowe"). Zestawienie powinno być ułożone alfabetycznie.
5. Jeżeli Autor wykorzystuje materiały objęte nie swoim prawem autorskim, powinien uzyskać pisemną zgodę właściciela tych praw do publikacji (niezależnie od podania źródła). Kopie takiej zgody należy przesłać Redakcji.

Artykuły wnoszące wkład naukowy w dyscyplinę inżynieria lądowa i transport podlegają procedurom recenzji merytorycznych zgodnie z wytycznymi MNiSW, co pozwala zaliczyć je, po opublikowaniu, do dorobku naukowego oraz uwzględnić w ewaluacji jakości działalności naukowej (Dz.U. 2019 poz. 392). Liczba uwzględnianych punktów w ewaluacji osiągnięć naukowych wynosi 5.

Do oceny każdej publikacji powołuje się co najmniej dwóch niezależnych recenzentów spoza jednostki. Zasady kwalifikowania lub odrzucenia publikacji i ewentualny formularz recenzencki są podane do publicznej wiadomości na stronie internetowej czasopisma lub w każdym numerze czasopisma. Nazwiska recenzentów poszczególnych publikacji/numerów nie są ujawniane; raz w roku (w ostatnim numerze oraz na stronie internetowej) czasopismo podaje do publicznej wiadomości listę recenzentów współpracujących.

Przygotowany materiał powinien obrazować własny wkład badawczy autora. Redakcja wdrożyła procedurę zapobiegania zjawisku Ghostwriting (z „ghostwriting" mamy do czynienia wówczas, gdy ktoś wniósł istotny wkład w powstanie publikacji, bez ujawnienia swojego udziału jako jeden z autorów lub bez wymienienia jego roli w podziękowaniach zamieszczonych w publikacji). Tekst i ilustracje muszą być oryginalne i niepublikowane w innych miejscach (w tym w internecie). Możliwe jest zamieszczanie artykułów, które ukazały się w materiałach konferencyjnych i podobnych (na prawach rękopisu) z zaznaczeniem tego faktu i po przystosowaniu do wymogów publikacyjnych „Przeglądu Komunikacyjnego".

Redakcja pisma oferuje objęcie patronatem medialnym konferencji, debat, seminariów itp.
Ceny są negocjowane indywidualnie w zależności od zakresu zlecenia. Możliwe są atrakcyjne upusty. Patronat obejmuje:

- ogłaszanie przedmiotowych inicjatyw na łamach pisma,
- zamieszczanie wybranych referatów / wystąpień po dostosowaniu ich do wymogów redakcyjnych,
- publikację informacji końcowych (podsumowania, apele, wnioski),
- kolportaż powyższych informacji do wskazanych adresatów.

www.transportation.overview.pwr.edu.pl

Na okładce: *Przęsło odciążające KO30. Źródło: Marek Szafrański*

przegląd komunikacyjny 11/2019 rocznik LXXIV

Szanowni P.T. Czytelnicy

Numer poświęcony jest w całości problemom dynamiki obiektów infrastruktury transportowej, głównie transportu szynowego. Autorzy pierwszego artykułu przedstawiają porównanie dwóch metod symulacji drgań układu pociąg – tor różniące się modelem kontaktu koło – szyna. W pierwszej metodzie zastosowano dwustronną, odkształcalną więź kontaktową typu Hertz'a, w drugiej więź nieodkształcalną. Stwierdzono, że zastąpienie sztywnych więzi kontaktowych przez dwustronne więzi sprężyste Hertz'a nie ma istotnego wpływu na symulację drgań toru i ma niewielki wpływ na symulację drgań nadwozia pojazdu i wózka jezdnego.

W kolejnej publikacji przedstawiono porównanie odpowiedzi dynamicznych mostów o różnych charakterystykach dynamicznych na quasi – rzeczywiste obciążenie ruchome. Poddano analizie różne układy most – tor – pociąg poruszający się z dużą prędkością.

Autorzy kolejnej publikacji przedstawili model oraz algorytm pozwalający na uwzględnienie współpracy geosyntetyków z konstrukcjami inżynierskimi. W następnej publikacji Autorzy przedstawiają rozwiązanie modelu dwóch płyt Kirchhoffa połączonych warstwą wypełnienia sprężystego Winklera. Układ ten spoczywa na podłożu i obciążony jest jednomasowym oscylatorem lepkosprężystym poruszającym się ze stałą prędkością po górnej płycie. W kolejnej publikacji Autorzy omawiają cztery przykładowe płaskie przestrzenne układy materialne w których nagle usunięto część więzów. Autorzy podają rozwiązanie analityczne problemu.

Życzę naszym czytelnikom dobrej lektury.

Redaktor Naczelny
Prof. Antoni Szydło

W numerze

Wydawca:
Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej
00-043 Warszawa, ul. Czackiego 3/5
www.sitkrp.org.pl

Redaktor Naczelny:
Antoni Szydło

Redakcja:
Krzysztof Gasz, Igor Gisterek, Bartłomiej Krawczyk, Maciej Kruszyna (Z-ca Redaktora Naczelnego), Agnieszka Kuniczuk - Trzcinowicz (Redaktor językowy), Piotr Mackiewicz (Sekretarz), Wojciech Puła (Redaktor statystyczny), Wiesław Spuziak, Robert Wardęga, Czesław Wolek

Adres redakcji do korespondencji:
Poczta elektroniczna:
redakcja@przeglad.komunikacyjny.pwr.wroc.pl

Poczta „tradycyjna":
Piotr Mackiewicz, Maciej Kruszyna
Politechnika Wrocławska,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
Faks: 71 320 45 39

Rada naukowa:
Marek Ciesielski (Poznań), Antanas Klibavičius (Wilno), Jozef Komačka (Žilina), Elżbieta Marciszewska (Warszawa), Andrzej S. Nowak (Auburn University), Tomasz Nowakowski (Wrocław), Victor V. Rybkin (Dniepropietrovsk), Marek Sitarz (Katowice), Wiesław Starowicz (Kraków), Hans-Christoph Thiel (Cottbus), Tomasz Siwowski (Rzeszów), Jiri Strasky (Brno), Andrea Zuzulova (Bratysława)

Rada programowa:
Mirosław Antonowicz, Dominik Borowski, Leszek Krawczyk, Marek Krużyński, Leszek W. Mindur, Andrzej Żurkowski

Deklaracja o wersji pierwotnej czasopisma
Główną wersją czasopisma jest wersja elektroniczna. Na stronie internetowej czasopisma dostępne są pełne wersje artykułów oraz streszczenia w języku polskim (od 2010) i angielskim (od 2016).

Redakcja zastrzega sobie prawo dokonywania zmian w materiałach nie podlegających recenzji.

Artykuły opublikowane w „Przeglądzie Komunikacyjnym" są dostępne w bazach danych 20 bibliotek technicznych oraz są indeksowane w bazach:

BAZTECH: **http://baztech.icm.edu.pl**
Index Copernicus: **http://indexcopernicus.com**

Prenumerata:
Szczegóły i formularz zamówienia na stronie:

http://www.transportation.overview.pwr.edu.pl

Obecna Redakcja dysponuje numerami archiwalnymi począwszy od 4/2010.

Numery archiwalne z lat 2004-2009 można zamawiać w Oddziale krakowskim SITK, ul. Siostrzana 11, 30-804 Kraków, tel./faks 12 658 93 74, **mrowinska@sitk.org.pl**

Druk:
HARDY Design, 52-131 Wrocław, ul. Buforowa 34a
Przemysław Wołczuk, **przemo@dodo.pl**

Reklama:
Dział Marketingu: **sitk.baza@gmail.com**

Nakład: 800 egz.

Dwustronna więź kontaktowa Hertz'a w numerycznej analizie drgań sprzężonego układu pociąg-tor

Two-way Hertzian spring in numerical analysis of coupled train-track system vibrations

Danuta Bryja

Dr hab. inż., prof. PWr

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska

danuta.bryja@pwr.edu.pl

Wojciech Chojnacki

Mgr inż.

(student) Wydział Architektury, Politechnika Wrocławska

211490@student.pwr.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono i porównano dwie metody symulacji drgań układu pociąg-tor, różniące się modelem kontaktu koło-szyna. W pierwszej metodzie zastosowano dwustronną, odkształcalną więź kontaktową typu Hertz'a, w drugiej – więź nieodkształcalną. W obu metodach przyjęto płaski model obliczeniowy, złożony z belki Eulera spoczywającej na podłożu sprężysto-tłumiącym typu Winklera i zestawu pojazdów szynowych modelowanych układami dynamicznymi o dziesięciu stopniach swobody. Przedstawiono wyniki analiz numerycznych, których celem było określenie wpływu podatności dwustronnych więzi kontaktowych na wyniki symulacji drgań rozważanego układu. Stwierdzono, że zastąpienie sztywnych więzi kontaktowych przez dwustronne więzi sprężyste Hertz'a nie ma istotnego wpływu na symulacje drgań toru i ma niewielki wpływ na symulacje drgań nadwozia pojazdu i wózka jezdnego. Zaproponowana metoda symulacji będzie mogła być wykorzystana do badań numerycznych zjawiska chwilowego odrywania kół od szyn, po niewielkich modyfikacjach w celu wprowadzenia jednostronnych więzi Hertz'a (nie przenoszących sił rozciągających), które są dokładniejszym modelem kontaktu.

Słowa kluczowe: *Układ pociąg-tor; symulacje drgań; zagadnienie kontaktowe; więź Hertz'a*

Abstract: The paper presents and compares two methods for simulation the train-track system vibrations, differing in the wheel-rail contact model used. In the first method, two-way Hertzian spring is used, in the second – a non-deformable constraint. In both methods, a flat computational model is assumed, consisting of an Euler-Bernoulli beam resting on a Winkler-type elastic foundation with damping and a set of rail vehicles modeled by dynamic systems with ten degrees of freedom. The results of numerical analysis are presented, in order to determine an influence of the contact constraints' deformability on the vibration simulations. It is found that the replacement of non-deformable contact constraints by two-way Hertzian springs has no significant effect on track vibration simulations and has a little effect on vibration simulations of vehicle body and bogie. The developed simulation method can be used for numerical studies of the phenomenon of instantaneous detachments of wheels from rails, after minor modifications directed to introduce one-way Hertzian springs (i.e. not carrying tensile forces) being a more accurate contact model.

Keywords: *Train-track system; vibration simulations; contact problem; Hertzian spring*

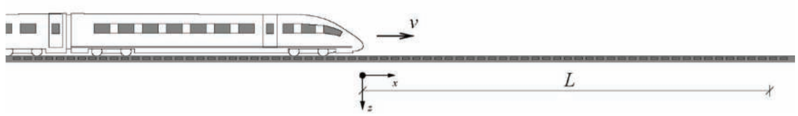
Dobór modelu kontaktowego opisującego styk koła pojazdu kolejowego z szyną stanowi jeden z podstawowych problemów dynamiki obliczeniowej sprzężonego układu pociąg-tor. W literaturze istnieje wiele teorii opisujących zjawiska występujące w strefie kontaktu koła z szyną. Prostą ich klasyfikację, opracowaną na podstawie znanej pracy Kalkera [1], przedstawiono w monografii [2] z 1984 roku. Bazuje ona na podziale teorii kontaktu tocznego na kilka podkategorii. Pierwsza z nich to podział na teorie dokładne i uproszczone, gdzie teorie dokładne bazują na założeniu, że koło i szyna w pobliżu powierzchni kontaktu są traktowane jako półprzestrzeń sprężysta, a związki konstytutywne wynikają z teorii sprężystości. W teoriach uproszczonych stosuje się parametry zależne jedynie od powierzchni kontaktu dwóch ciał, bez wprowadzania pojęcia półprzestrzeni. W kolejnym podziale wyróżnia się teorie dynamiczne, w których uwzględniane są efekty bezwładnościowe i teorie quasi-statyczne, w których te efekty są pomijane. Najbardziej oczywistym podziałem jest rozróżnienie teorii trójwymiarowych i dwuwymiarowych. W monografii Bosso i in. [3] z 2013 roku można znaleźć obszerny przegląd współczesnych modeli kontaktowych, na ogół bardzo złożonych i wykorzystujących modelowanie MES. Przedstawiane tam modele znajdują zastosowanie w zagadnieniach mechaniki pojazdów kolejowych.

Zdecydowanie prostsze modele kontaktowe są stosowane w symulacjach numerycznych drgań sprzężonego układu pociąg-tor, przeznaczonych do analiz dynamiki toru kolejowego. Zazwyczaj modelem kontaktu jest wtedy tzw. sprężyna kontaktowa typu Hertz'a (ang. *Hertzian spring*) [4], [5], która jest najczęściej traktowana jako więź dwustronna czyli przenosząca zarówno ściskanie jak i rozciąganie. Przy dużych prędkościach jazdy, dwustronny model kontaktu odbiega znacznie od rzeczywistości, ponieważ pomija chwilowe odrywania zestawów kołowych od szyn. Więź jednostronną, przenoszącą tylko ściskanie zastosowano m.in. w pracy Podwórnej i Klasztornego [6] poświęconej badaniom wpływu wybranych cech pojazdów kolejowych na drgania belki swobodnie podpartej idealizującej most belkowy. Zestawy pojazdów kolejowych modelowano w tej pracy kolejno jako: układy ruchomych sił, mas nieresorowanych oraz jedno- i dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych. Mimo obszernych i ciekawych analiz, nie przedstawiono jednak porównania z rozwiązaniami alternatywnymi z zastosowaniem więzi dwustronnej.

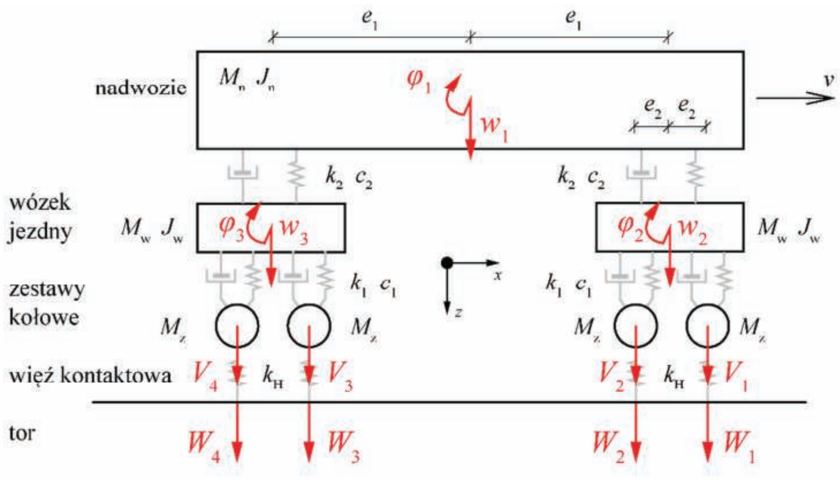
Praca [6] zainspirowała autorów tego artykułu do podjęcia badań, których finalnym celem ma być oszacowanie wpływu zastosowania jednostronnej więzi kontaktowej Hertz'a w symulacjach drgań układu pociąg-tor, poprzez porównanie z rezultatami uzyskanymi przy zastosowaniu typowej więzi dwustronnej. Niniejszy artykuł przedstawia pierwszy etap badań, w którym opracowano metodę symulacji drgań układu uwzględniającą typową, dwustronną więź kontaktową Hertz'a na styku zestawów kołowych i szyn. Metoda jest tak pomyślana, aby po niewielkich modyfikacjach planowanych w drugim etapie prac, umożliwiała wykonanie obliczeń z zastosowaniem więzi kontaktowej jednostronnej. W części numerycznej porównano wyniki symulacji przebiegów przemieszczeń oraz prędkości i przyspieszeń drgań poszczególnych elementów wybranego pojazdu kolejowego i wybranych punktów toru, wyznaczone przy użyciu dwóch algorytmów – z uwzględnieniem dwustronnej więzi typu Hertz'a i z pominięciem podatności tej więzi, tzn. przy założeniu więzi nieodkształcalnej na ruchomym styku koło-szyna. Zbadano także wpływ sztywności odkształcalnej więzi kontaktowej na wyniki symulacji drgań układu pociąg-tor.

Metoda symulacji drgań układu pociąg-tor

Przedmiotem rozważań są drgania pionowe płaskiego modelu układu składającego się z dwóch sprzężonych podukładów dynamicznych: 1) zestawu czteroosiowych pojazdów kolejowych, z których każdy jest traktowany jako układ dyskretny o 10 stopniach swobody, oraz 2) toru będącego ciągłą belką Eulera-Bernoulliego spoczywającą na podłożu sprężysto-tłumiącym typu Winklera. Ogólny schemat układu przedstawiono na rysunku **1**. Przyjęto, że zestaw pojazdów (pociąg) porusza się ze stałą prędkością v po odcinku toru odkształcalnego o długości L, dostatecznie dużej, aby w sensie numerycznym odcinek modelował tor nieskończenie długi. Przed wjazdem na odcinek L i po zjeździe z odcinka pociąg porusza się po torze niepodatnym. Każdy z pojazdów jest systemem trzech tarcz masowych zastępujących nadwozie i wózki jezdne oraz czterech mas skupionych modelujących zestawy kołowe. Elementy te są połączone więziami liniowo-sprężystymi i tłumikami wiskotycznymi, które modelują dwustopniowe zawieszenie. Między zestawami kołowymi a torem wprowadzono dwustronne liniowo-sprężyste więzi kontaktowe typu Hertz'a o sztywności k_H. Model dynamiczny pojazdu pokazano na rysunku **2**, wraz z oznaczeniami dynamicznych przemieszczeń elementów masowych.



1. Poglądowy schemat układu pociąg-tor

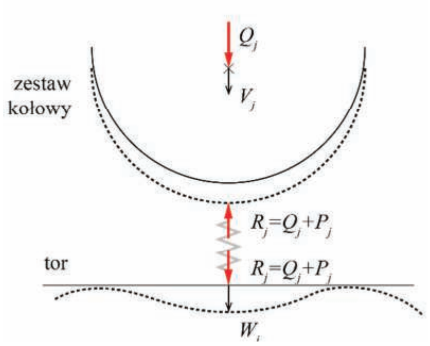


2. Model dynamiczny pojazdu

Założono sztywny sprzęg pomiędzy pojazdami w kierunku podłużnym. W chwili początkowej $t = 0$ czoło pociągu znajduje się w lewym skrajnym punkcie podatnego odcinka toru, o współrzędnej $x = 0$. Pojazdy wjeżdżające na badany odcinek toru znajdują się w stanie równowagi statycznej, co oznacza, że wszystkie odkształcalne więzi pojazdu uległy deformacji spowodowanej ciężarem własnym elementów konstrukcyjnych pociągu, przekazanym przez więź kontaktową na tor niepodatny. Przemieszczenia dynamiczne pojazdu zaznaczone na rysunku **2** są mierzone od statycznie zrównoważonej konfiguracji odniesienia.

Tor kolejowy zdefiniowano jako belkę Eulera-Bernoulliego spoczywającą na odkształcalnym podłożu sprężystym typu Winklera, z tłumieniem. Parametry podłoża, tj. współczynnik sprężystości k i tłumienia c są stałe. Belka jest pryzmatyczna, inercyjna, idealnie prostoliniowa, zastępuje oba toki szynowe. Materiał belki jest liniowo-sprężysty. Uwzględniono tłumienie wynikające z reologicznych cech materiału szyn, zgodnie z modelem Voigta-Kelvina.

Na rysunku **3** przedstawiono siły działające na styku j-tego zestawu kołowego z szyną oraz przemieszczenia dynamiczne podukładów w punkcie styku: przemieszczenie dynamiczne zestawu kołowego $V_j(t)$ i przemieszczenie toru $W_j(t)$. Z rysunku wynika, że tor jest obciążony reakcją więzi kon-



3. Bilans sił na styku zestawu kołowego z torem

taktowej R_j (t) = Qj + P_j (t), składającą się ze statycznego nacisku osiowego Q_j i siły dynamicznej interakcji między podukładami P_j (t). Na zestaw kołowy, oprócz reakcji więzi Rj (t) działa przeciwnie do niej skierowana siła statyczna Q_j, czyli ciężar pojazdu przypadający na oś. Wynika stąd, że w równaniu ruchu pojazdu

$$\mathbf{B}_{\mathrm{v}}\ddot{\mathbf{v}}_{i_{\mathrm{v}}} + \mathbf{C}_{\mathrm{v}}\dot{\mathbf{v}}_{i_{\mathrm{v}}} + \mathbf{K}_{\mathrm{v}}\mathbf{v}_{i_{\mathrm{v}}} = \tilde{\mathbf{F}}_{i_{\mathrm{v}}} \qquad (1)$$

nie występują statyczne naciski osiowe. Pojazd jest obciążony tylko siłami wzajemnego dynamicznego oddziaływania toru i pojazdu, które są dynamicznymi komponentami reakcji więzi kontaktowych

$$P_j(t) = k_{\mathrm{H}}[V_j(t) - W_j(t)] \qquad (2)$$

Równanie ruchu (1) wyprowadzono metodologią typową dla układów dyskretnych, tj. na podstawie bilansu energetycznego i równań Lagrange-'a. Szczegóły wyprowadzenia można znaleźć w pracy [7]. Wektor przemieszczeń uogólnionych pojazdu $\mathbf{v}_{iv}$ =col($\mathbf{r}_{iv}$,$\mathbf{V}_{iv}$) podzielono tu na dwa bloki $\mathbf{r}_{iv}$=[w_1,w_2,$w3$,φ_1,φ_2,φ_3]$_{iv}^{\mathrm{T}}$ i $\mathbf{V}_{iv}$=[V_1,V_2,V_3,V]$_{iv}^{\mathrm{T}}$ (por. z rysunkiem **2**), co ułatwia procedurę agregacji równań (1) zapisanych dla kolejnych pojazdów i_v = 1, 2, …, N_v. Symbol „col" oznacza macierz kolumnową złożoną z bloków wektorowych a ( )$^{\mathrm{T}}$ operację transpozycji. Indeks i_v określa numer pojazdu liczony od czoła pociągu, zatem liczba osi pociągu wynosi N =4N_v oraz j = 1, 2, …, N.

Stosując procedurę agregacji opisaną w [7], otrzymuje się równanie drgań zestawu N_v pojazdów, wzbudzanych kinematycznie pionowymi drganiami toru

$$\mathbf{B}_{\mathrm{pp}}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{p}} + \mathbf{C}_{\mathrm{pp}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{p}} + \mathbf{K}_{\mathrm{pp}}\mathbf{q}_{\mathrm{p}} = \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{p}} \qquad (3)$$

Aby ułatwić zapis matematyczny sprzężenia równania (3) z równaniem drgań toru, w wektorze przemieszczeń uogólnionych $\mathbf{q}_p$=col($\mathbf{r}$, $\mathbf{V_o}$) wyróżniono dwa bloki: $\mathbf{r}$=col($\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$,…,$\mathbf{r}_{Nv}$) i $\mathbf{V_o}$=col($\mathbf{V}_1$,$\mathbf{V}_2$,…,$\mathbf{V}_{Nv}$), przy czym łatwo zauważyć, że w bloku $\mathbf{V_o}$ są zgrupowane przemieszczenia wszystkich kolejnych zestawów kołowych. Po wprowadzeniu ciągłej numeracji j = 1, 2, …, N można zapisać $\mathbf{V_o}$=[V_1,V_2,…,V_N]$^{\mathrm{T}}$. Wektor prawej strony równania (3) jest postaci

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{col}(\emptyset, \{k_{\mathrm{H}}\}\mathbf{W_o}),$$

gdzie symbol Φ oznacza wektor zerowy o rozmiarze 6N_v, {k_H}=diag(k_H,k_H,…,k_H) jest macierzą diagonalną o rozmiarze N, a wektor $\mathbf{W_o}$=[W_1,W_2,…,W_N]$^{\mathrm{T}}$ gromadzi przemieszczenia toru w puntach styku z kolejnymi zestawami kołowymi – tzw. przemieszczenia śledzące [8].

Równanie (3) jest sprzężone poprzez przemieszczenia śledzące $\mathbf{W_o}$ z macierzowym równaniem ruchu toru

$$\mathbf{B}_{\mathrm{tt}}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}} + \mathbf{C}_{\mathrm{tt}}\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}} + \mathbf{K}_{\mathrm{tt}}\mathbf{q}_{\mathrm{t}} = \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{t}} \qquad (4)$$

które wyprowadzono na podstawie znanego równania drgań giętnych belki Eulera-Bernoulliego, obciążonej zbiorem ruchomych sił

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + k\,w(x,t) = \sum_{j=1}^{N} R_j(t)\delta(x - s_j) \qquad (5)$$

R_j (t) = Q_j + P_j (t) jest tu reakcją więzi kontaktowej Hertz'a, a funkcja s_j (t)=vt-d_j opisuje położenie j-tego zestawu kołowego w chwili t, przy czym d_j jest odległością osi j-tego zestawu kołowego od czoła pociągu. Aby równanie (5) przekształcić do postaci (4), zastosowano metodę elementów skończonych w ujęciu Galerkina (ang. *GFEM*). Procedura tego przekształcenia bazuje na rozwiązaniach sformułowanych w pracach [9], [10] i jest szczegółowo opisana w pracy [7].

Po wyznaczeniu jawnej postaci wektorów prawych stron w równaniach (3) i (4), można zapisać te równania łącznie w następującej postaci blokowej

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathrm{rr}} & \mathbf{B}_{\mathrm{ro}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{B}_{\mathrm{or}} & \mathbf{B}_{\mathrm{oo}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{r}}\\ \ddot{\mathbf{V}}_{\mathrm{o}}\\ \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{\mathrm{rr}} & \mathbf{C}_{\mathrm{ro}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}_{\mathrm{or}} & \mathbf{C}_{\mathrm{oo}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{r}}\\ \dot{\mathbf{V}}_{\mathrm{o}}\\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\mathrm{rr}} & \mathbf{K}_{\mathrm{ro}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}_{\mathrm{or}} & \mathbf{K}_{\mathrm{oo}} & -\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{ot}}\\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{to}} & \mathbf{K}_{\mathrm{tt}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{V}_{\mathrm{o}}\\ \mathbf{q}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{Q}}\end{bmatrix} \qquad (6)$$

gdzie nadpisana tylda wyróżnia macierze i wektory zależne od czasu, przy czym nie zaznaczono w ten sam sposób oczywistej zależności od czasu wektorów przemieszczeń uogólnionych $\mathbf{r}$(t) i $\mathbf{V_o}$ (t) oraz współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_t$ (t). Formuły określające poszczególne bloki macierzy współczynników i prawej strony równania (6) są podane w pracy [7].

Metoda symulacji drgań opisanego wyżej układu pociąg-tor opiera się na rozwiązaniu sprzężonego systemu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu (6), który można zapisać zbiorczo w następującej postaci ogólnej

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \qquad (7)$$

Aby ocenić wpływ wprowadzenia dwustronnej więzi kontaktowej typu Hertz'a do modelu obliczeniowego rozważanego układu, sformułowano alternatywny, porównawczy model obliczeniowy zastępując podatną więź kontaktową przez więź sztywną. Ten najprostszy, sztywny model kontaktu koło-szyna, często stosowany w literaturze (por. [6]), prowadzi do zgodności przemieszczeń toru i zestawów kołowych w punktach styku. W tym przypadku należy przyjąć, że $\mathbf{V_o}$=$\mathbf{W_o}$, a wtedy równanie ruchu układu pociąg-tor ma inną postać ogólną

$$\mathbf{B}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \qquad (8)$$

i blokową

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathrm{rr}} & \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rt}}\\ \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{tr}} & \mathbf{B}_{\mathrm{tt}} + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{r}}\\ \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{\mathrm{rr}} & \tilde{\mathbf{C}}_{\mathrm{rt}}\\ \tilde{\mathbf{C}}_{\mathrm{tr}} & \mathbf{C}_{\mathrm{tt}} + \tilde{\mathbf{C}}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{r}}\\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\mathrm{rr}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{rt}}\\ \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{tr}} & \mathbf{K}_{\mathrm{tt}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{tt}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{q}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{Q}}\end{bmatrix} \qquad (9)$$

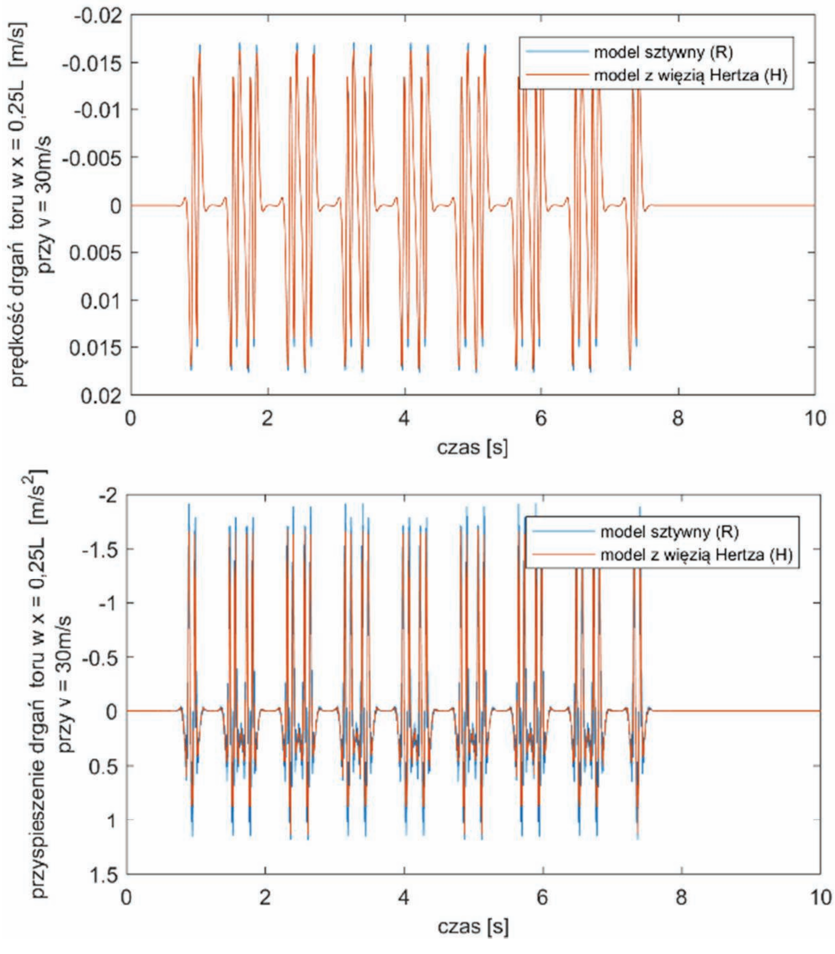
Liczba równań różniczkowych zmniejsza się o N w porównaniu z układem równań ruchu (7), co istotnie skraca czas obliczeń, mimo tego, że stopień złożoności obliczeniowej algorytmu rośnie wskutek pojawienia się dodatkowych, zależnych od czasu bloków w macierzy bezwładności i tłumienia.

Wyniki analizy numerycznej

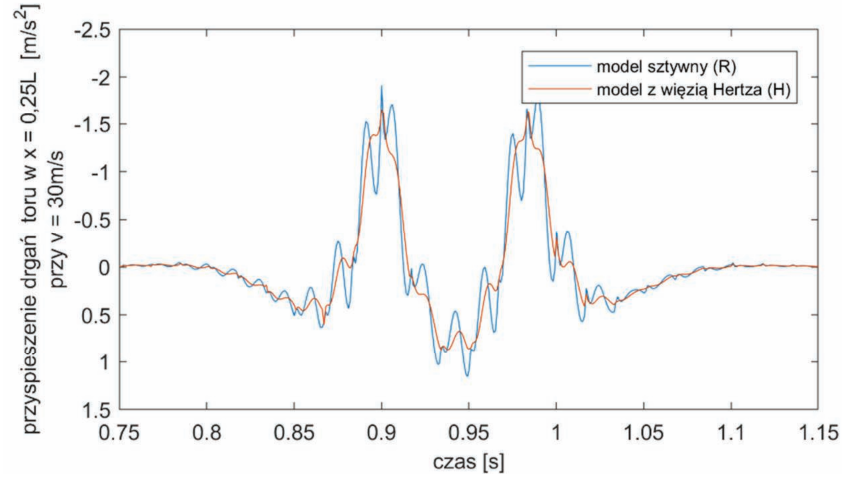
W celu przeprowadzenia analiz numerycznych opracowano w środowisku programistycznym MATLab dwa alternatywne algorytmy obliczeniowe bazujące odpowiednio na równaniach (7) i (8). W obu algorytmach zastosowano do całkowania równań ruchu metodę Newmarka z parametrem $\beta = ¼$ zapewniającym bezwarunkową stabilność metody. Do obliczeń przyjęto dane wejściowe wzorowane na pracy [9], przy czym do analiz przyjęto dłuższy odcinek toru, tj. odcinek o długości 100 m. Współczynniki sprężystości i tłumienia podłoża toru wynoszą odpowiednio: $k = 1{,}1 \cdot 10^8$ N/m^2, $c = 2{,}8667 \cdot 10^5$ Ns/m^2, sztywność giętna belki modelującej dwa toki szynowe wynosi $EJ = 1{,}2831 \cdot 10^7$ Nm^2 a jej masa jednostkowa $m = 1{,}21 \cdot 10^2$ kg/m. W obliczeniach uwzględniono tłumienie materiałowe w szynach z czasem retardacji $2{,}1 \cdot 10^{-5}$ s. Drgania toru są wzbudzane przejazdem pociągu typu Shinkansen, który składa się z ośmiu 25-metrowych powtarzalnych pojazdów. Rozstawy osi pociągu, parametry masowe i charakterystyki zawieszeń przyjęto według danych z monografii [11]. Sztywność podatnej więzi kontaktowej Hertz'a wariantowano, przyjmując za wartość bazową $k_H = 1{,}4 \cdot 10^8$ N/m (na podstawie [4] i [6]) a następnie $k_H = 1{,}4 \cdot 10^7$ N/m i $k_H = 1{,}4 \cdot 10^9$ N/m. Odcinek toru podzielono na 200 elementów skończonych o jednakowej długości, do numerycznego całkowania przyjęto krok 0,0001 s.

Analizie poddano przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań nadwozia pierwszego z ośmiu pojazdów i przedniego wózka jezdnego pierwszego pojazdu, a także toru w trzech punktach: w ¼, ½ i ¾ długości badanego odcinka. Symulacje wykonano za pomocą dwóch omówionych wcześniej algorytmów obliczeniowych, przy różnych prędkościach przejazdowych pociągu: 30, 60 i 90 m/s (108, 216 i 324 km/h), oceniając wpływ podatności więzi kontaktowej na symulacje drgań układu. Stwierdzono, że wpływ ten nie zależy istotnie od przyjętej prędkości przejazdowej pociągu, zatem na kolejnych rysunkach pokazano tylko wyniki przykładowe, dotyczące prędkości 30 m/s. Ponadto okazało się, że przyjęcie podatnej więzi kontaktowej o typowej sztywności $k_H = 1{,}4 \cdot 10^8$ N/m, zamiast więzi sztywnej nie wpływa w sposób widoczny na przebiegi przemieszczeń toru, a wnioski dotyczące prędkości i przyspieszeń drgań nie zależą od wyboru przekroju toru. Z tego powodu, na rysunku **4** przedstawiono tylko przebiegi prędkości i przyspieszenia drgań w przekroju $x = 0{,}25L$.

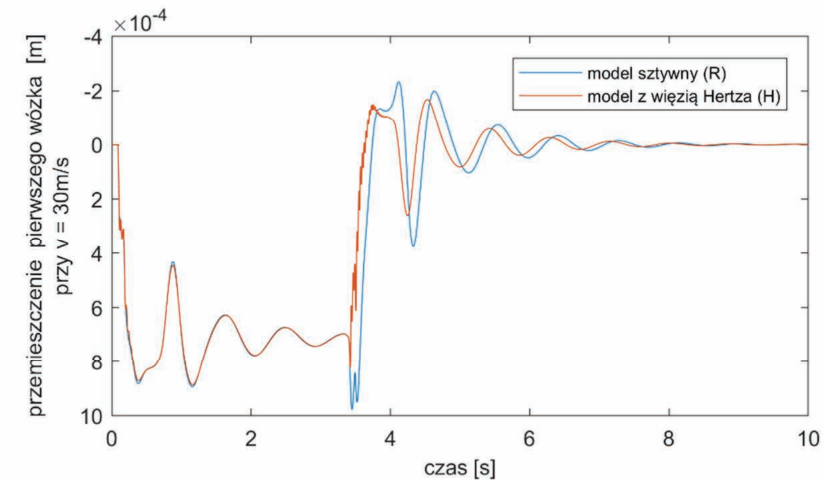
Analiza wykresów przedstawionych na rysunku **4** prowadzi do wniosku, że zastosowanie podatnej więzi Hertz'a na styku zestawów kołowych z torem, zamiast więzi sztywnej, powoduje nieznaczne różnice między rozwiązaniami, polegające na niewielkiej redukcji wartości pików i wygładzeniu form przebiegów. Dokładniej obrazuje to



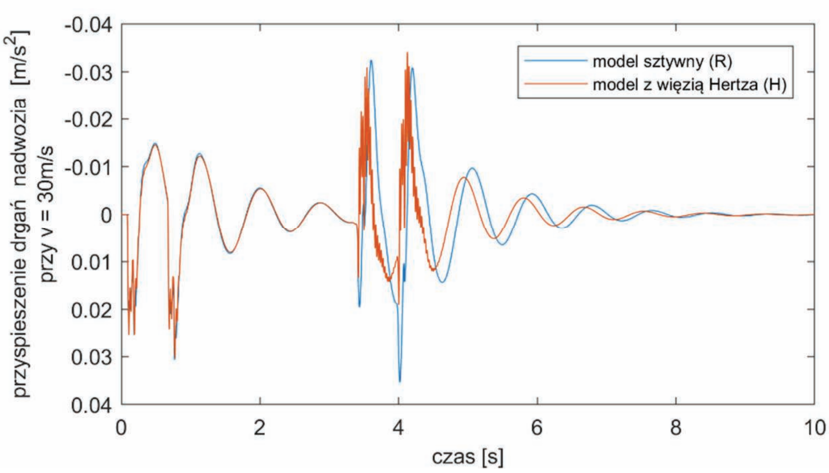
***4**. Prędkości i przyspieszenia drgań toru w przekroju x = 0,25L*



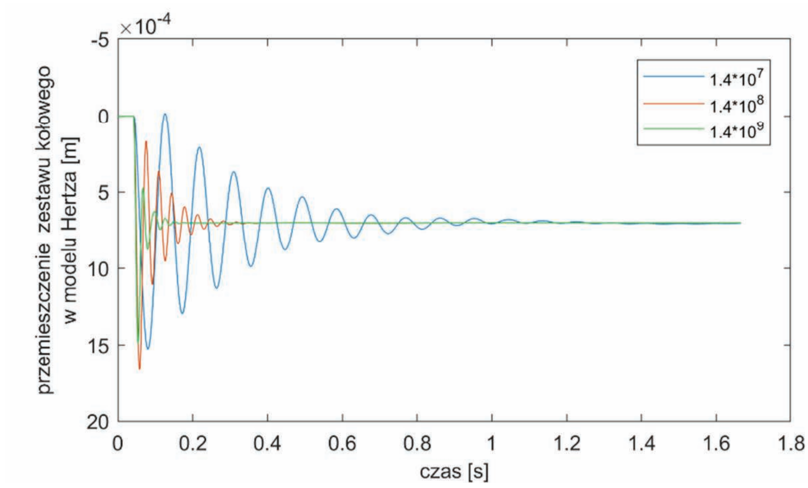
***5**. Fragment przebiegów przyspieszenia drgań toru w przekroju x = 0,25L* rysunek **5**, na którym pokazano wybrany fragment przebiegów przyspieszeń. Na rysunku **6** pokazano przebiegi pionowych drgań przedniego wózka jezdnego pierwszej jednostki powtarzalnej pociągu, a na rysunku **7** – przyspieszenia pionowych drgań nadwozia tego pojazdu. Dominujący wpływ na kształt przedstawionych wykresów ma zaistniały w początkowej i końcowej fazie ruchu efekt progowy, wynikający z wjazdu na odkształcalny odcinek toru i zjazdu z tego odcinka. Przejazd przez odkształcalny odcinek toru z prędkością 30 m/s trwa 3,33 s, a następnie pojazd ponownie wjeżdża na tor całkowicie nieodkształcalny, gdzie po krótkim okresie przejściowym wykonuje gasnące drgania swobodne. W okresie przejściowym, w drganiach wózka ujawnia się efekt wjazdu drugiej osi wózka na tor nieodkształcalny a także efekt wjazdu drugiego wózka tego samego pojazdu. W przypadku przyspieszeń drgań nadwozia, wyraźnie widoczny jest tylko efekt wjazdu drugiego wózka. Podobnie są ukształtowane rozwiązania w początkowej fazie ruchu pojazdu, ale efekt progowy jest mniejszy m. in. dlatego, że w chwili wjazdu na odkształcalny odcinek toru przemieszczenia dynamiczne pojazdu i ich prędkości są zerowe.



6. Pionowe drgania przedniego wózka jezdnego w pierwszym pojeździe



7. Przyspieszenia drgań nadwozia pierwszego pojazdu



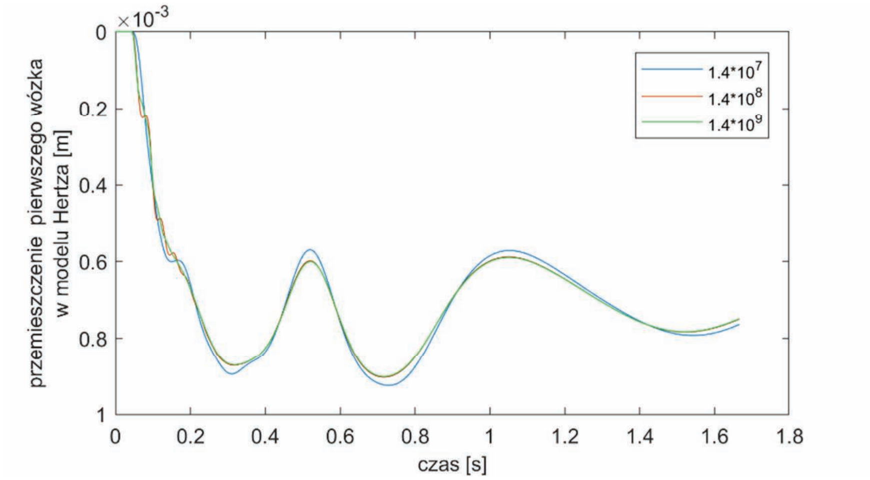
8. Drgania przedniego zestawu kołowego w pierwszym pojeździe, w zależności od sztywności więzi kontaktowej Hertz'a

W przeciwieństwie do początkowej fazy ruchu, po zjeździe pojazdu z odkształcalnego odcinka toru obserwujemy widoczne różnice między rozwiązaniami wyznaczonymi z zastosowaniem podatnej i sztywnej więzi kontaktowej. Zarówno w przypadku przemieszczeń wózka jak i przyspieszeń nadwozia, wprowadzenie do modelu obliczeniowego odkształcalnych więzi kontaktowych skutkuje zmniejszeniem amplitud oraz przesunięciem fazowym przebiegów (rysunki **6** i **7**). Ponadto, w przebiegach drgań pojawiają się dodatkowe oscylacje wysokoczęstotliwościowe, które wynikają z lokalnych drgań zestawów kołowych. Na rysunku **8** pokazano przykładowe przebiegi tych drgań, wygenerowane przy trzech różnych sztywnościach więzi Hertz'a i prędkości przejazdowej 60 m/s. Towarzyszące im przebiegi pionowych drgań pierwszego wózka jezdnego przedstawiono na rysunku **9**. Można zauważyć, że im większa jest sztywność więzi kontaktowej tym mniejszy jest okres drgań swobodnych i szybciej zanikają lokalne drgania zestawu kołowego. Przemieszczenie dynamiczne zestawu kołowego ustala się, podobnie jak przemieszczenie śledzące toru (por. [9]). Ponadto, jak stwierdzono na podstawie rysunku **9**, sztywność więzi kontaktowej nie może być dobrana zbyt mała, ponieważ może to prowadzić do zdegenerowania (przeszacowania) przebiegów drgań pojazdu a stąd i toru. Przyjęcie wartości k_H = $1{,}4 \cdot 10^8$ N/m zalecanej w literaturze [4] wydaje się rozsądnym kompromisem, ponieważ daje wyniki nie różniące się znacząco od uzyskanych przy zastosowaniu więzi sztywnej (rysunki **4**-**7**) a równocześnie pozostawia swobodę pionowego ruchu zestawów kołowych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono i porównano dwie metody symulacji drgań układu pociąg-tor, różniące się zastosowanym modelem kontaktu koło-szyna. W pierwszej metodzie zastosowano model w postaci dwustronnej, podatnej więzi kontaktowej typu Hertz'a, w drugiej – model w postaci więzi nieodkształcalnej. W obu metodach przyjęto płaski model obliczeniowy układu, złożony z belki Eulera-Bernoulliego spoczywającej na podłożu sprężysto-tłumiącym typu Winklera i zestawu pojazdów szynowych z dwustopniowym zawieszeniem, modelowanych układami dynamicznymi o dziesięciu stopniach swobody. Przedstawiono wyniki analiz numerycznych, których celem było określenie wpływu uwzględnienia podatności dwustronnych więzi kontaktowych na wyniki symulacji drgań rozważanego układu. Stwierdzono, że zastąpienie sztywnych więzi kontaktowych przez dwustronne więzi podatne typu Hertz'a o typowej sztywności zalecanej w literaturze, nie ma wpływu na symulacje drgań toru a wpływ na symulacje przyspieszeń jest nieznaczny, niezależnie od prędkości przejazdowej. Widocznym skutkiem jest natomiast niewielka redukcja pików oscylacji przemieszczeń i przyspieszeń elementów konstrukcyjnych pojazdu. Wynika stąd, że rozwiązania dla pojazdu, wyznaczone przy założeniu sztywnych więzi kontaktowych są rozwiązaniami konserwatywnymi, czyli korzystnymi z punktu widzenia bezpieczeństwa w projektowaniu konstrukcji. Stosowanie dwustronnych więzi Hertz'a w modelu obliczeniowym układu pociąg-tor, często praktykowane we współczesnej literaturze, nie ma zatem istotnego uzasadnienia.

Wprowadzenie więzi podatnych na stykach kół z szynami jest uzasadnienie wtedy, gdy więzi te są traktowane jako jednostronne, tzn. nie przenoszące rozciągania. Pozwalają one uwzględnić chwilowe odrywania zestawów kołowych od toru, które pojawiają się m. in. przy dużych prędkościach przejazdowych powodujących duże przyspieszenia drgań toru i zestawów kołowych ([9]). Należy przypuszczać, że efekty dynamiczne wynikające z chwilowej utraty kontaktu koło-szyna mogą być znaczące. Ten problem będzie przedmiotem dalszych badań autorów, które będą prowadzone za pomocą metody symulacyjnej przedstawionej w tej pracy, po niewielkich jej modyfikacjach. Wprowadzone modyfikacje metody umożliwią obserwowanie reakcji każdej podatnej więzi kontaktowej w każdym kroku obliczeniowym, i przyjęcie zerowej sztywności tej więzi w przypadku jej rozciągania. Niniejszą pracę należy potraktować jako pierwszy etap badań prowadzących do oceny wpływu odrywania powierzchni tocznych kół od szyn na odpowiedź dynamiczną układu pociąg-tor. Warto podkreślić, że badania numeryczne przedstawione w tej pracy wykazały już, że metoda symulacyjna działa poprawnie w strefach pełnego kontaktu kół z szynami, jeśli sztywność wirtualnej więzi kontaktowej jest właściwie dobrana. ◀



9. Pionowe drgania przedniego wózka jezdnego w pierwszym pojeździe, w zależności od sztywności więzi kontaktowej Hertz'a

Materiały źródłowe

[1] Kalker J. J., Review of wheel-rail rolling contact theories, the general problem of rolling contact, Applied Mechanics Division (ASME, New York), 40, 1980, 77-92.

[2] Garg V.K., Dukkipati R.V., Dynamics of railway vehicle systems, Academic Press, New York, 1984.

[3] Bosso N., Spiryagin M., Gugliotta A., Somá A., Mechatronic Modeling of Real-Time Wheel-Rail Contact, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.

[4] Esveld C., Modern Railway Track, MRT-Productions, The Netherlands, 2014.

[5] Romero A., Galvín P., Domínguez J., A time domain analysis of train induced vibrations, Earthquakes and Structures, 3(3), 2012, 297-313.

[6] Podwórna M., Klasztorny M., Wpływ cech pojazdów szynowych na odpowiedź dynamiczną mostu belkowego, Drogi i Mosty, 3, 2011, 63-87.

[7] Chojnacki W., Więź kontaktowa typu Hertza w symulacjach numerycznych drgań układu pociąg – tor, Praca magisterska WBLiW PWr, 2018.

[8] Langer J., Dynamika budowli, Wyd. Polit. Wrocł., Wrocław, 1980.

[9] Bryja, D., Gisterek, I., Popiołek, A., Analiza numeryczna wpływu nierówności progowej na drgania toru kolejowego spowodowane przejazdem pociągu dużych prędkości, Inżynieria i Budownictwo, 71(10), 2015, 532-536.

[10] Bryja D., Hołubowski R., Modelowanie belkowych mostów kolejowych z zastosowaniem metody GFEM. Część I. Sformułowanie teoretyczne, Zeszyty Naukowe Polit. Rzeszowskiej nr 283, seria Budownictwo i Inżynieria Środowiska, z. 59, 2012, 5-19.

[11] Klasztorny M., Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005.

Odpowiedzi krótkich belek mostowych na przejazd pociągów szybkobieżnych

Response of short span bridges under mooving high-speed train

Monika Podwórna

Dr inż.

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądiowego i Wodnego

monika.podworna@pwr.edu.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono porównanie odpowiedzi dynamicznych mostów o różnych charakterystykach dynamicznych na quasi-rzeczywiste obciążenie ruchome. Poddano analizie różne układy most – tor – pociąg poruszający się z dużą prędkością. Układ jest jednotorowy z nawierzchnią kolejową podsypkową. Modelem mostu jest 15 metrowa belka swobodnie podparta o konstrukcji stalowej. Model obciążenia odwzorowuje pociąg Shinkansen. Wyniki porównano z bardzo uproszczonymi modelami obciążeń, jak strumienie sił skupionych, mas skupionych, oscylatorów jednomasowych i oscylatorów dwumasowych.

Słowa kluczowe: *Krótki most kolejowy swobodnie podparty;Interakcja pojazd – most; Rezonans*

Abstract: The paper presents a comparison of dynamic responses of bridges with different dynamic characteristics to a quasi-real mobile load. Different bridge – track – train (moving at high speed) systems were analyzed. The system is ballasted monotrack. The model of the bridge is a 15-meter beam simple-supported with a steel structure. The load model is represented by the Shinkansen train. The results are compared with very simplified load models, such as streams of concentrated forces, concentrated masses, one-mass oscillators and two-mass oscillators.

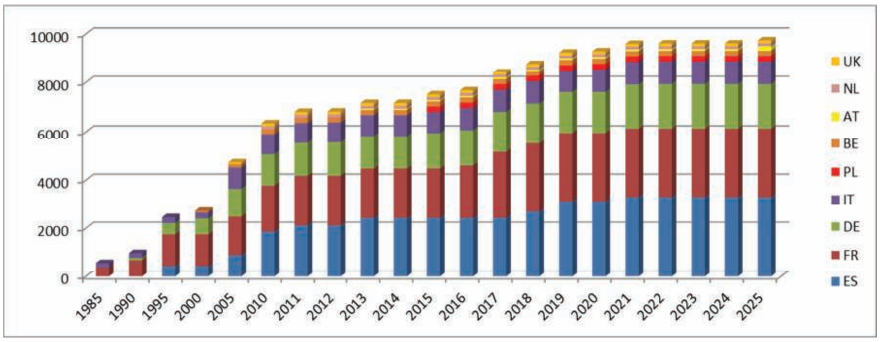
Keywords: *Short span simply supported railway bridge; Vehicle-bridge interaction, Resonance*

Systemy transportowe odgrywają kluczową rolę w nowoczesnych społeczeństwach. Rozwój gospodarczy zależy od szybkiej i skutecznej mobilności zarówno ludzi, jak i towarów. W tym kontekście, system kolei dużych prędkości (pol. KDP; ang. HSR, High-speed rail) stanowi atrakcyjną alternatywę dla środków transportu drogowego. Szybka kolej stała się ważnym elementem krajowej sieci transportowej, gdyż jest opcją podróży, która podnosi jakość życia i wspiera wzrost gospodarczy. Kolej HSR powstała w drugie połowie XX wieku. W 1964 r został otwarty pionierski system HSR - pierwszy odcinek linii kolejowej (Tokio-Osaka) japońskiego pociągu Shinkansen poruszającego się z prędkością eksploatacyjną 210 km/h. Następnie w 1981 powstała linia kolejowa łącząca Paryż z Lyon, po której poruszał się pociąg TGV z maksymalną prędkością 260 km/h. Do Japonii i Francji dołączyły Włochy w 1981 r., Niemcy w 1988 r. (pociągi ICE), Hiszpania w 1992 r., Belgia w 1997 r., Wielka Brytania i Chiny w 2003 r., Szwajcaria i Korea Południowa w 2004 r., Holandia i Turcja w 2009 r., Austria w 2012 r. oraz Polska w 2015 r. Na podstawie danych zawartych w opracowaniu Unii Europejskiej [19] na rysunku 1 przedstawiono stan obecny oraz linie w budowie systemu kolei dużych prędkości w Europie.

Zgodnie z Dyrektywą Unii Europejskiej [2], linie kolei dużych prędkości obejmują:

- specjalnie wybudowane linie dużych prędkości, przeznaczone generalnie dla prędkości równych lub przekraczających 250 km/h,
- specjalnie zmodernizowane linie dużych prędkości przeznaczone dla prędkości rzędu 200 km/h,
- specjalnie zmodernizowane linie dużych prędkości, posiadające szczególne cechy będące rezultatem uwarunkowań związanych z topografią, rzeźbą terenu i urbanistycznych, na których to liniach prędkość musi być dostosowywana do każdego przypadku. Niniejsza kategoria obejmuje również linie łączące sieci dużych prędkości oraz sieci konwencjonalne, linie przebiegające przez dworce, dostęp do terminali, lokomotywowni itp., z których korzysta tabor dużych prędkości poruszający się z prędkością konwencjonalną.

Konstrukcje mostowe są bardzo istotnymi elementami linii kolei dużych prędkości, służą do przekraczania przeszkód, takich jak rzeki, doliny, istniejące autostrady lub linie kolejowe. W ostatnich dziesięcioleciach, analizy mostów kolejowych były przedmiotem badań wielu inżynierów, ponieważ efekt dynamiczny powodowany przez pociągi przejeżdżające przez



***1**. Długość linii kolei szybkich HSR NETWORK w Europie*

most jest jednym z najbardziej istotnych aspektów, które należy wziąć pod uwagę na etapie projektowania [4]. Badania wykazały, że przy prędkościach powyżej 200 km/h mogą pojawiać się nadmierne drgania w wyniku zjawisk rezonansowych, co zostało potwierdzone w przepisach normowych [11]. Przejścia następujących po sobie obciążeń (kolejne naciski osi zestawów kołowych przemieszczające się po moście) mogą wzbudzić konstrukcję mostową i gdy częstość wymuszenia (lub jej krotność) będzie bliska częstości drgań własnych układu (lub jej krotności) może pojawić się zjawisko rezonansu. Może to prowadzić do kilku problemów, a mianowicie do: niestabilności warstwy podsypki, utraty kontaktu między kołem a szyną, zwiększenia uszkodzeń związanych ze zmęczeniem lub nawet komfortu pasażerów. [20] Należy pamiętać, że niektóre aspekty nie są jeszcze do końca znane, co sprawia, że projektanci stają przed problemem co z analizą dynamiczną mostów kolejowych – czy nie pojawią się wyższe wartości przyspieszenia niż te uznane za dopuszczalne w normach europejskich [22].

Obecne normy europejskie odzwierciedlają problem nadmiernych drgań poprzez wymóg przeprowadzenia analizy dynamicznej w prawie każdym przypadku, gdy maksymalna prędkość linii przekracza 200 km/h. W stosunku do wcześniejszych Polskich Norm [12, 13], w normach PN-EN [10,11] rozbudowano podejście do zagadnień dynamicznych mostów kolejowych. Dynamiczny charakter obciążenia uwzględniany jest na dwa sposoby:

- poprzez wprowadzenie obliczeń statycznych na zwiększonych, przez współczynnik dynamiczny φ, obciążeniach – podobnie jak we wcześniejszych normach krajowych,
- poprzez analizę bezpośrednich procesów deformacji i dystrybucji sił wewnętrznych oraz naprężeń od obciążeń poruszających się z ustalonymi prędkościami na podstawie dynamicznej odpowiedzi układu (analiza czasowa) [26]

Z powodu nieujednoliconych wymagań dotyczących kolei dużych prędkości analizy dynamiczne powinny być przeprowadzane na podstawie norm, literatury technicznej oraz kolejowych standardów technicznych. [27] Obiekt mostowy dopuszczony do użytkowania i eksploatacji przy przejazdach taboru kolejowego z dużymi prędkościami, powinien spełniać wiele warunków. Główne z nich to:

- wymagania stanu granicznego nośności z uwzględnieniem dodatkowych efektów dynamicznych oraz zmęczeniowych wywołanych dużymi prędkościami,
- wymagania stanu granicznego użytkowalności, które zapewnia bezpieczeństwo ruchu oraz odpowiedni komfort jazdy pasażerów,
- wymagania trwałości konstrukcji, unikanie trwałych deformacji,
- wymagania odpowiedniego wyposażenia trasy kolejowej,
- poprawność rozwiązań konstrukcyjnych, zarówno projektowych jak i wykonawczych,
- wymagania ochrony środowiska – minimalne zanieczyszczenia oraz hałas,
- wymagania ekonomiczne - koszty eksploatacji i konserwacji toru powinny być stosunkowo niskie.

Analiza dynamiczna

Historia analizy ruchomych obciążeń w Polsce sięga czasów przedwojennych. Pierwsze pionierskie prace wiążą się z nazwiskiem Aleksandra Wasiutyńskiego. Zastosowanie metod komputerowych do zagadnień obciążeń ruchomych w Polsce wiąże się z nazwiskiem Jana Langera.[24]

W celu analizy dynamicznych efektów mostów kolejowych w wyniku przejazdu pociągu o dużych prędkości można stosować różnego typu metody, m.in.:

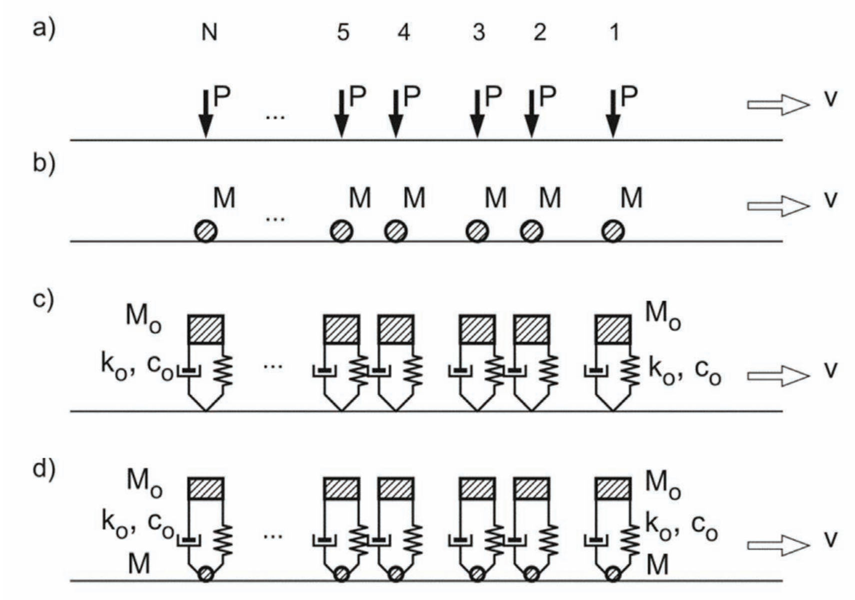
1. metody analityczne oparte np. na analizie modalnej,
2. metody uproszczone, wykorzystujące wprowadzenie wzbudzenia rezonansowego (DER - Decomposition of the Resonance Excitation),
3. metody empiryczne opierające się na rzeczywistych przykładach, ograniczając się do kilku typów konstrukcji,
4. metody analityczne oparte na interakcji pojazd-konstrukcja mostu.

W metodach czasowych stosuje się różne dokładności matematyczne i fizyczne - wykorzystuje się różne modele teoretyczne odwzorowujące pociąg ruchomy np.

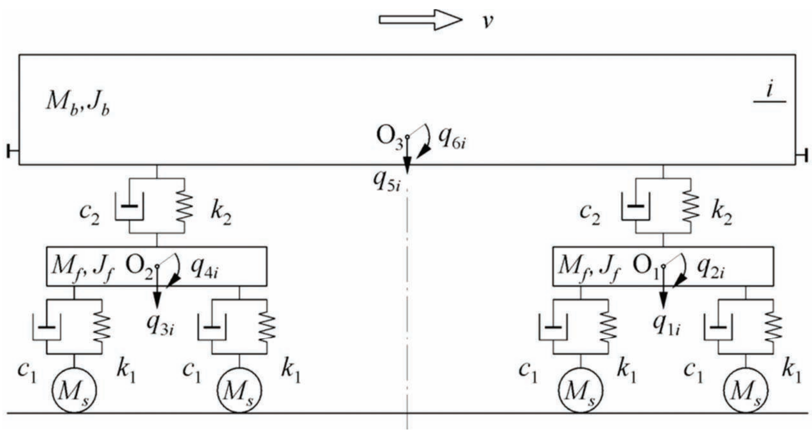
- modele normowe HSLM (ang. High Speed Load Model) A i B,
- siły skupione,
- masy skupione,
- oscylatory jednomasowe,
- lepko-sprężyste oscylatory dwumasowe,
- płaskie zestawy sztywnych tarcz masowych i mas skupionych,
- przestrzenne zestawy tarcz i mas,
- inne.

Oprócz obciążeń deterministycznych, ze względu na losowość drgań, wielu badaczy posługuje się modelowaniem obciążeń stochastycznych - rozpatruje drgania w kategoriach probabilistycznych, a więc wykorzystuje aparat matematyczny z zakresu rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych. [23]

W pracy porównano wyniki dla bel-



__2__. Przyjęte proste modele obciążeń ruchomych:
a) model P; b) model M; c) model M_o; d) model MM_o [14]



__3__. Płaski model obciążeń ruchomych – model MBFS. [17]

__4__. Przykładowy pociąg Shinkansen, [6]

kowych mostów o rozpiętości 15m otrzymane metodami analitycznymi dla następujących płaskich modeli obciążeń poruszających się ze stałą prędkością:

1. strumień sił skupionych [14]- model P, rysunek **2**,
2. strumień mas skupionych [14] - model M, rysunek **2**,
3. strumień oscylatorów jednomasowych [14] - model M_o, rysunek **2**,
4. strumień oscylatorów dwumasowych [14]- model MM_o, rysunek **2**,
5. zestaw dwóch sztywnych tarcz masowych z liniowymi lepkosprężystymi zawieszeniami pierwszego i drugiego stopnia [17] – model MBFS, rysunek **3**.

Wyżej wymienione pięć modeli odwzorowuje japoński pociąg typu Shinkansen (rysunek **4**) złożony z 8 powtarzalnych pojazdów szynowych, każdy o długości 25 m, o dwóch niezależnych dwuosiowych wózkach jezdnych o rozstawie osiowym 17,5 m. [20]

Piąty model pojazdu (rysunek **3**) jest bardziej złożony od pozostałych - składa się z czterech nieresorowanych mas skupionych odwzorowujących zestawy kołowe, z dwóch sztywnych tarcz masowych odwzorowujących ramy wózków jezdnych łącznie z silnikami trakcyjnymi oraz górnej sztywnej tarczy masowej odwzorowującej nadwozie pojazdu. W modelu pojazdu występują cztery liniowe lepkosprężyste zawieszenia pierwszego stopnia oraz dwa zawieszenia stopnia drugiego. Układ ma 6 stopni swobody.

Przyjęto następujące główne założenia:

- model fizyczny układu jest płaski,
- uproszczonym modelem mostu kolejowego jednoprzęsłowego jest swobodnie podparta belka Eulera,
- tłumienie w belce jest typu Langera (model stałego dekrementu) [8],
- oś belki obciążonej statycznie ciężarem własnym jest prostoliniowa,
- tor poza belką jest prostoliniowy i niepodatny,
- szyny są idealnie proste - bez nierówności toru,
- układ jest przedziałami liniowy fizycznie i geometrycznie,
- prędkość obciążenia jest stała,
- w chwili *t*=0 układ jest w równowadze statycznej,
- rozpatruje się skończony strumień N powtarzalnych elementów ruchomych, w odstępach odwzorowujących rozstaw osiowy wózków jezdnych oraz długość pojazdu (obciążenie cykliczne),
- uwzględniono jednostronne więzy między kołami pojazdów a szynami (modele MM_o i MBFS).

W analizie dynamicznej modeli M_o, MM_o, MBFS wprowadzono siły interakcji (rysunek **5**) pomiędzy skupionymi elementami ruchomymi a belką mostową (ang. VBI - the vehicle-bridge interaction).

Równania ruchu sformułowano w niejawnej postaci, oddzielnie dla belki oraz obciążenia ruchomego. Zastosowano równania Lagrange'a II rodzaju dla belki oraz zasadę d'Alembert'a dla obciążenia ruchomego. Otrzymano macierzowe równania ruchu podukładów należące do klasy równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych, o stałych współczynnikach:

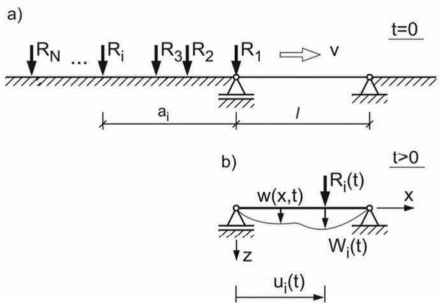
$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{R}(t), t] \quad (1)$$

gdzie: **B**,**C**,**K** - macierze bezwładności, tłumienia i sztywności, **F**[**R**(*t*),*t*] - wektor obciążeń uogólnionych zależny od wektora sił interakcji **R**(*t*) i zmiennej czasowej *t*.

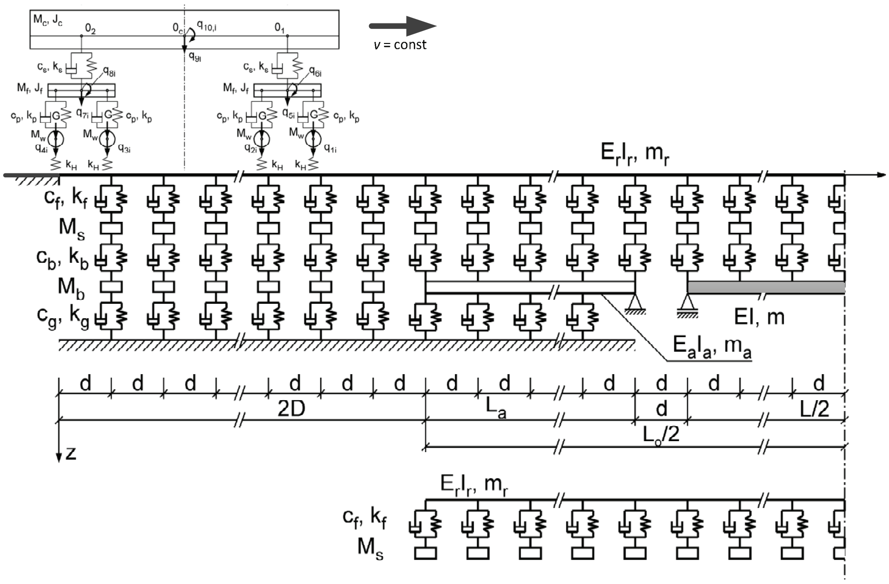
Macierzowe równania ruchu układu sformułowano częściowo w niejawnej postaci. Następnie scałkowano je numerycznie za pomocą metody średniego przyspieszenia Newmarka z parametrami β_N=1/4, γ_N=1/2, rozwiniętej do niejawnej postaci [14]. Przeprowadzono analizę drgań giętnych w płaszczyźnie pionowej mostów.

W wyniku analizy dynamicznej otrzymano następujące wnioski:

1. Modele P i M nie uwzględniają resorowania – brak interakcji układu pojazd – konstrukcja.
2. Model M jest oceniany jako najmniej korzystny gdyż wykazuje duże różnice, zarówno jakościowe, jak i ilościowe, w porównaniu z innymi modelami.
3. Modele P i M_o są bliskie rzeczywistości, ale w stanach rezonansowych mogą występować zaburzenia wyników.
4. W zakresie uproszczonych modeli pociągów model MM_o jest najbardziej zbliżony do rzeczywistości
5. Modelowanie szybkich pojazdów szynowych wymaga uwzględnienia w komplecie mas nieresorowanych, mas resorowanych oraz zawieszeń lepkosprężystych. Model MM_o mający te cechy jest raczej zbyt uproszczony. Sugeruje się, aby modelować osobno zestawy kołowe, resorowane ramy wózków jezdnych, resorowane nadwozie pojazdu i zawiesia lepkosprężyste pierwszego i drugiego rzędu, np. model MBFS.
6. W przypadku powtarzalnych pojazdów szynowych mogą występować stany rezonansowe, dlatego w symulacjach dynamicznych należy wziąć pod uwagę całkowitą liczbę pojazdów oraz współczynniki tłumienia.



***5**. Modele belki i obciążenia ruchomego: a) konfiguracja układu w chwili początkowej, b) ugięcie dynamiczne belki w(x,t) oraz położenie siły interakcji R_i (t)*



***6**. Przykładowy układ uwzględniający odkształcalność stref dojazdowych – skala skażona [15]*

W żadnym z powyższych modeli nie uwzględniono odkształcalność toru w strefach dojazdowych do mostu. W pracach [15, 18], gdzie przyjęto dużo bardziej złożony układ (rysunek 6) most – tor – pociąg ruchomy (BTT system), został udowodniony ogromny wpływ tego elementu na analizę mostu jako oddziaływania pod wpływem pociągów poruszających się z dużymi prędkościami. Przedstawione wyniki analizy w pracy [1] potwierdzają, że należy uwzględnić „nierówność progową toru" spowodowaną nagłą zmianą sztywności podtorza.

Zakończenie

Modele o stałym obciążeniu ruchomym są szeroko stosowane w dynamicznej analizie mostów kolejowych. Jednak użycie tego prostego modelu może przeszacować odpowiedź rezonansową mostu o schemacie belki swobodnie podpartej, jeśli efekty interakcji pojazd - most (ang. VBI - the vehicle-bridge interaction) są pomijane, szczególnie w przypadku krótkich rozpiętości. [25] Aby uwzględnić efekty VBI, Eurokod 1 [11] umożliwia inżynierom rozważenie dodatkowego tłumienia konstrukcyjnego, które zależy od rozpiętości mostu. Ta metoda jest tak zwaną dodatkową metodą tłumienia (ang. ADM - Additional Damping Method), została sformułowana w celu uwzględnienia wpływu prognozowanej interakcji. Należy wziąć pod uwagę, że metoda dodatkowego tłumienia może czasami powodować niebezpieczną prognozę odpowiedzi konstrukcji. [25].

W pracy [5] przedstawiającej analizę teoretyczną oraz doświadczalną mostu o rozpiętości przęsła 15,25 m, autorzy przyznali, że modele numeryczne przeszacowują maksymalne przyspieszenia konstrukcji mostowej. Twierdzą, że prawdopodobnie jest to spowodowane brakiem uwzględnienia interakcji pojazd - konstrukcja, które są najbardziej istotne w rezonansie. Takie sytuacje rzadziej zdarzają się w mostach średnich bądź długich. [5]

Mosty kolejowe o małych rozpiętościach wydają się bardziej problematyczne [21]. Obserwuje się, że zjawisko rezonansu występuje częściej w krótkich mostach [3, 9]. Należy zaznaczyć, że na dynamiczne zachowanie wpływają nie tylko właściwości konstrukcyjne mostu, ale także właściwości dynamiczne toru, a mianowicie podsypka i szyna oraz dynamiczne właściwości pojazdu, szczególnie w mostach o małych rozpiętościach. Te aspekty skutkują szczególnie trudnymi do przewidzenia odpowiedziami dynamicznymi na etapie projektowania tego typu konstrukcji [22].

Dynamiczna analiza konstrukcji mostowych jest konieczna w przypadku pojawienia się rezonansu, czyli niebezpiecznego zjawiska, które może występować w wyniku dużych prędkości i regularnie rozmieszczonych grup osi pociągów (cykliczność obciążenia). Jeżeli jeszcze dodatkowo występują nierówności toru to nadmierne drgania płyty mostowej mogą powodować utratę kontaktu koło-szyna, destabilizację podsypki, występowanie pęknięć i kruszeń betonu oraz przekroczenie granic naprężeń konstrukcji mostu. Efekty dynamiczne, w tym zjawisko rezonansu, zawsze muszą być brane pod uwagę, gdy analizowany jest most kolejowy po którym mogą poruszać się pociągi dużych prędkości. W przypadku cyklicznego strumienia sił ruchomych w belce mogą wystąpić stany rezonansów siłowych. ◀

Materiały źródłowe

[1] Bryja D., Popiołek A., Analiza drgań pojazdów kolejowych w trakcie ich przejazdu przez nierówność progową toru, Przegląd komunikacyjny, 9,2018, 68-72.

[2] Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2008/57/WE z dnia 17 czerwca 2008 r. w sprawie interoperacyjności systemu kolei we Wspólnocie (przekształcenie) - Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej L 191/1.

[3] ERRI D-214/RP 9. Rail bridges for speeds >200 km/h. Final report. Utrecht: European Rail Research Institute (ERRI); 1999.

[4] Fryba L., Dynamics of railway bridges. Academia, Praha, 1996.

[5] Galvin P., Romero A., Moliner E., Martinez-Rodrigo M.D., Two FE models to analyse the dynamic response of short span simply-supported oblique high-speed railway bridges: Comparison and experimental validation, Engineering Structures, 167, 2018, 48-64

[6] http://www.ns.szybkiekoleje.org.pl/, 2019-08-22

[7] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi, WNT, Warszawa 2005.

[8] Langer J., Dynamika budowli, WPWr, Wrocław 1980.

[9] Museros P, Romero ML, Poy A, Alarcon E., Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines, Computers & Structures, 80, 2002, 212 1-32

[10] PN-EN 1990-Eurocode 0 Podstawy projektowania konstrukcji, 2004.

[11] PN-EN 1991-2 Eurocode 1 Oddziaływania na konstrukcje. Część 2. Obciążenia ruchome mostów; 2007.

[12] PN-66/B-02015. Mosty, wiadukty i przepusty – obciążenia i oddziaływania.

[13] PN-85/S-10030. Obiekty mostowe. Obciążenia.

[14] Podwórna M., Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part 1 – Modelling and numerical integration, Structural Engineering & Mechanics 38, 3, 2011, 283 – 300.

[15] Podwórna M., Dynamic response of steel-concrete composite bridges loaded by high-speed train, Structural Engineering & Mechanics, 62, 2, 2017, 179-196.

[16] Podwórna M., Współczynniki dynamiczne ugięć pionowych w analizie numerycznej belkowych mostów kolejowych, Przegląd Komunikacyjny, 9,2017, 7-11.

[17] Podwórna M., Vertical vibrations of steel beam bridges induced by trains moving at high speeds. Part 1 – theory, Archives of Civil Engineering, 51, 2, 2005, 179-209.

[18] Podwórna M., Klasztorny M., Vertical vibrations of composite bridge / track structure / high-speed train systems. Part 3: Deterministic and Random Vibrations of Exemplary System, Bulletin of the Polish Academy of Sciences / Technical Sciences 62, 2, 2014, 305-320.

[19] Raport Unii Europejskiej - EU transport in figures 2018.

[20] Rebelo C. Simoes da Silva L. Rigueiro C. Pircher M., Dynamic behaviour of twin single-span ballasted railway viaducts - field measurements and modal identification. J Engineering Structures 30, 2008, 2460-9.

[21] Rocha J.M., Henriques A.A., Calçada R., Probabilistic safety assessment of a short span high-speed railway bridge, Engineering Structures 71, 2014, 99–111.

[22] Rocha J.M., Henriques A.A., Calcada R., Safety assessment of a short span railway bridge for high-speed traffic using simulation techniques Engineering Structures 40, 2012, 141 – 154.

[23] Śniady P., Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji, Wrocław, Oficyna Wydawnicza PWr ,2000.

[24] Szcześniak W., Ataman M., Przegląd publikacji polskich autorów z zakresu obciążeń ruchomych na konstrukcjach inżynierskich, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, 226, 12, 2018, 667-674.

[25] Yau J.D., Martínez-Rodrigo M.D., Doménech A., An equivalent additional damping approach to assess vehicle-bridge interaction for train-induced vibration of short-span railway, Bridges Engineering Structures, 188, 2019, 469–479.

[26] Zbiciak A., Oleszek R., Michalczyk R., Dynamic of an orthotropic railway bridge in the light of european standards, Archives of Civil Engineering LXII, 2, 2016, s.265-282

[27] Zobel H., Mossakowski P., Oleszek R. Analiza statyczna i dynamiczna mostu kolejowego nad rzeką Czarna w ciągu CMK. Inżynieria i Budownictwo 7-8/2013, 429-435.

Układy dynamiczne w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich

Dynamic systems for the analysis of the behavior of geosynthetics in railway engineering structures

Eligiusz Mieloszyk

Prof. Dr hab. inż.

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Anita Milewska

Dr

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Sławomir Grulkowski

Dr inż.

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

slawi@pg.edu.pl

Streszczenie: W analizie współpracy geosyntetyków z elementami konstrukcji inżynierskiej możemy je traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. Modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka i jego elementów, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany zostanie model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony w postaci uogólnionego układu dynamicznego. W tym opisie wykorzystuje się różne operatory. Prowadzą one do układów ciągłych o parametrach rozłożonych. Rozpoczynając od opisu z wykorzystaniem układów dynamicznych ciągłych można przejść do układów dynamicznych dyskretnych. Pozwala na to teoria uogólnionych układów dynamicznych, poprzez wykorzystanie innych operatorów. Takie podejście umożliwia prowadzenie analizy problemu z wykorzystaniem sygnałów ciągłych i dyskretnych. Otrzymane wyniki pozwalają też wyznaczać odpowiedzi analizowanych układów metodami analitycznymi, numerycznymi lub hybrydowymi.

Słowa kluczowe: *Geosyntetyki; Układy dynamiczne; Nieklasyczny rachunek operatorów*

Abstract: While interacting with the elements of the engineering structures, geosynthetics can be treated as elastic membranes or shells placed on different types of foundation. Modeling of the real system takes into account the most important properties of the system and its elements. We will develop a physical and mathematical model in a form of generalized dynamic system. The mathematical description will use different operators leading to a continuous distributed system. The modeling will be further modified by development of discrete dynamic systems, which is enabled by the theory of generalized dynamic systems. This approach allows for the analysis of the problem with continuous and discrete signals. The results will show the response of the analyzed systems with analytic, numerical or hybrid methods.

Keywords: *Geosynthetics; Dynamic systems; Non-classical operational calculus*

Do opisu (modelowania) wielu układów fizycznych, mechanicznych wykorzystywane są układy dynamiczne ciągłe i dyskretne o parametrach skupionych i rozłożonych, stacjonarne i niestacjonarne. Szerokie możliwości tej teorii, a przede wszystkim teorii uogólnionych układów dynamicznych pozwalają zastosować je w analizie zachowania się geosyntetyków w kolejowych konstrukcjach inżynierskich poprzez wykorzystanie specjalnych operacji różniczkowych lub różnicowych oraz odpowiedniego kształtu endomorfizmów [13]. Wszystkie te zabiegi, co istotne, mają matematyczne uzasadnienie i w związku z tym ich zastosowanie jest uprawnione, o czym przekonamy się dalej. Geosyntetyki, czyli geowłókniny, geotkaniny, geosiatki, geomembrany, geowykładziny itp. są powszechnie stosowane w budownictwie, w tym przy budowie, modernizacji i remontach linii kolejowych zgodnie z wytycznymi zawartymi między innymi w [17]. Dobrze zbudowana droga szynowa to droga nie podlegająca przypadkowym, niekontrolowanym odkształceniom. Zwiększenie nośności poszczególnych warstw gruntu tworzących budowlę ziemną ma szczególne znaczenie w budowie dróg kolejowych.

Wspólną cechą geotekstyliów, geotkanin i geomembran jest brak sztywności na zginanie. Ich właściwości mechaniczne zależą od sposobu wykonania, użytych materiałów oraz sposobów zakotwienia. Często zastosowane geosyntetyki w budowli mają wielowarstwowe ułożenie (rys. **1**).

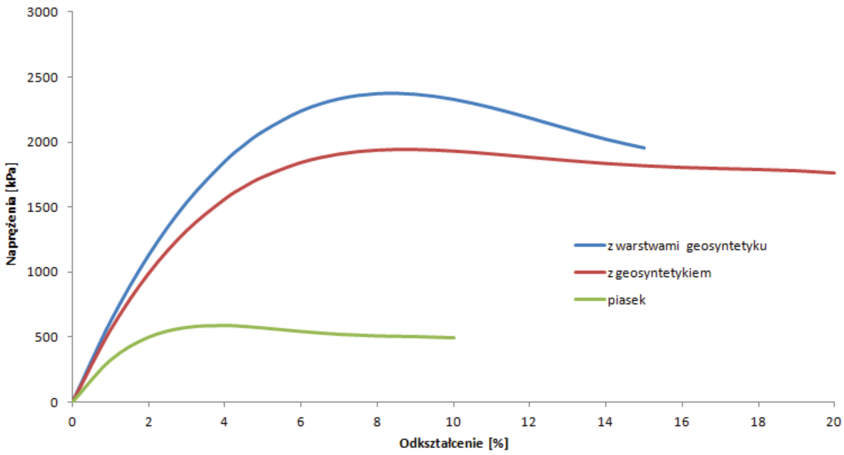
Takie wielowarstwowe stosowanie geosyntetyków jest korzystne. Świadczą o tym badania przeprowadzone w aparacie trójosiowego ścinania próbek gruntu (rys. **2**).

W przekroju drogi kolejowej ta wielowarstwowość przedstawiona jest na rys. **3**. Z powyższego wynika, ze każda kolejna warstwa posiada inne warunki obciążenia i współpracy. Zilustrowano to schematycznie na rys. **4**.

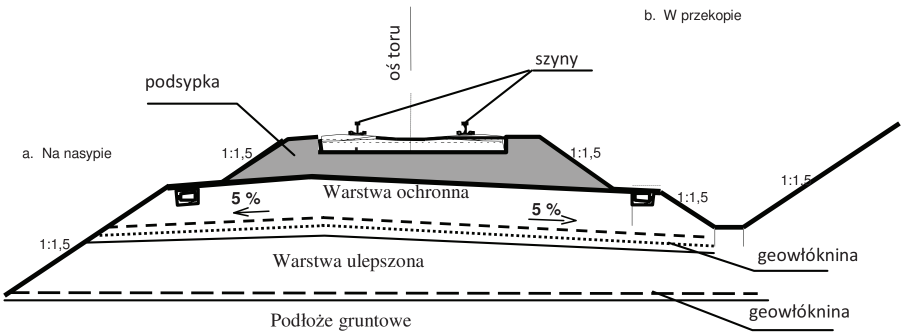
Charakter analogowy analizowanego problemu

W wielu przypadkach w analizie współpracy geosyntetyków z podłożem i elementami konstrukcji inżynierskiej (np. z podtorzem) możemy

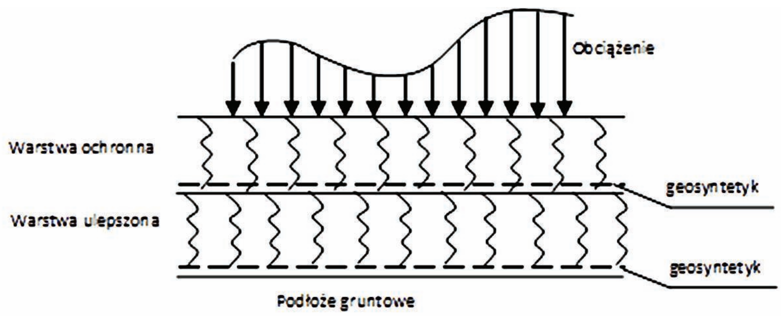
1. Wielowarstwowe ułożenie geosyntetyków w nasypie



2. Charakterystyka wyników testu przeprowadzonego w aparacie trójosiowego ścinania dla próbek gruntu o różnych zawartościach geosyntetyku opracowany na podstawie [5] przy σ_3 = 100 kPa



3. Przykładowy schemat ułożenia geosyntetyków w przekroju drogi kolejowej [11]

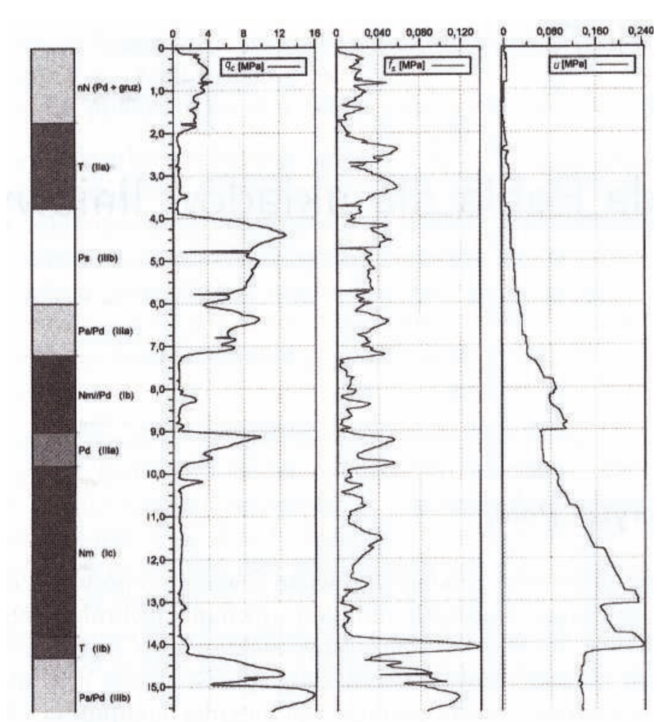


4. Przykładowy schemat obciążeń (obciążeń zastępczych) warstw drogi kolejowej [11]

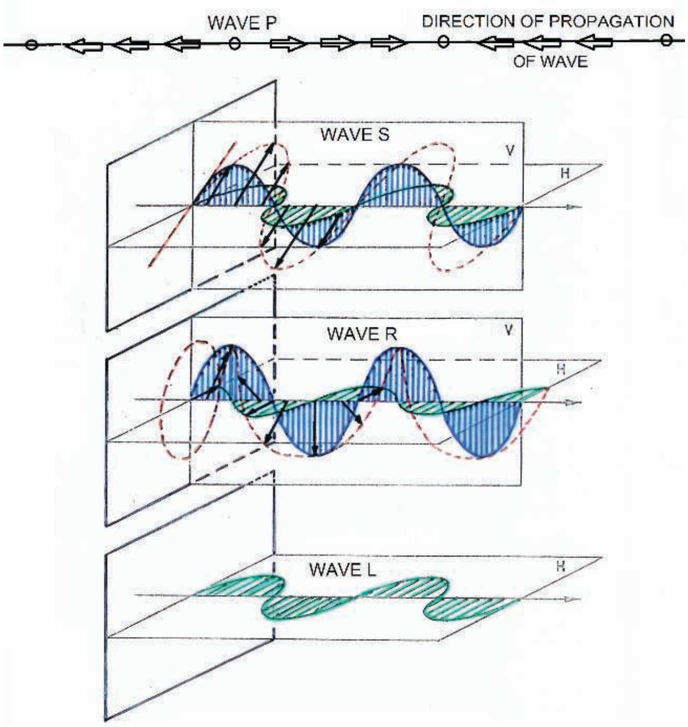
wybrane geosyntetyki traktować jako membrany sprężyste lub powłoki posadowione na różnych rodzajach podłoża. np. typu Winklera, Eulera, Pasternaka, Kerra, bowiem modelowanie układu rzeczywistego oznacza jego idealizację pod kątem uwzględnienia tych cech ośrodka, które wydają się najistotniejsze z punktu widzenia analizowanego problemu. Zbudowany model fizyczny, a następnie matematyczny przedstawiony jest zwykle w postaci szczególnych przypadków uogólnionych układów dynamicznych [13]. W tym szczególnym opisie teoria uogólnionych układów dynamicznych [13] dopuszcza wykorzystanie operatora Laplace'a Δ, a dalej z jego pomocą operatora d'Alemberta □ Podobnie jak płyta na podłożu gruntowym (podłożu sprężystym) opisywana jest z wykorzystaniem bilaplasjanu [16].

Analogicznie (w sensie problemów różniczkowych) modeluje się układy płytowe, czy fundamenty [8], fundamenty płytowo - palowe [6,15, 18, 21] dobierając odpowiednie parametry układu z uwzględnieniem parametrów podłoża gruntowego [19]. Na płytach, na fundamentach płytowo – palowych także posadowione są linie kolejowe, linie tramwajowe, rurociągi, drogi startowe. W tych przypadkach także wykorzystuje się geosyntetyki. W [4] autorzy wykorzystują w modelowaniu podłoże sprężyste do oceny wpływu nierównomiernego osiadania dna zbiornika na rozkład sił wewnętrznych w jego dnie. Jest to istotne dla określania awaryjności dużych zbiorników [1]. Takie koncepcje wykorzystuje się przy analizie wzajemnego oddziaływania w układzie pojazd kolejowy – tor – podtorze - podłoże gruntowe łącznie z ich eksperymentalną weryfikacją [14], także przez wcześniejsze rozpoznanie podłoża gruntowego np. z wykorzystaniem sondowania [7] i określenie jego parametrów z wykorzystaniem metody CPT bez pomiaru ciśnienia wody w porach gruntu lub metody CPTU z pomiarem ciśnienia wody w porach gruntu. Wyniki sondowania mogą być przedstawione za pomocą odpowiednich wykresów (rys. **5**). Na wykresach rejestrowane są: opór na stożku sondy q_c, tarcie na tulei ciernej f_s, ciśnienie wody w porach gruntu *u*.

W przypadku linii kolejowych wpływ na zachowanie się konstrukcji mają drgania, które są wywołane przez ruch pociągów i zależą między innymi od ich prędkości. Po przekroczeniu tzw. prędkości krytycznej drgania toru i podtorza znacznie zwiększają się i gwałtownie narastają trwałe odkształcenia toru [3]. Decydują o tym rozchodzące się drgania (fale), które są pewnego rodzaju perturbacjami w polu prędkości, przemieszczającymi się w ośrodku przyjmując różne formy i prędkości. Decydujące są tu fale sprężyste. Są to fale mechaniczne, które rozchodzą się w ośrodku sprężystym jakim jest podtorze i dalej przechodzą do otoczenia w wyniku działania sił związanych z odkształceniami objętości i postaci elementów całego



5. Przykładowy wynik badań CPTU w wybranym punkcie (węźle) sondowania [9]



6. Fale P, S, R, L [12]

ośrodka. Obiektami zewnętrznymi powodującymi owe odkształcenia są przejeżdżające pojazdy szynowe, które są źródłami fal, a na ich generowanie ma też wpływ geometria i stan toru.

Rozchodzenie się fal sprężystych w podtorzu, w gruncie polega tu na wzbudzaniu cząstek ośrodka coraz bardziej odległych od źródła fal. Fale sprężyste (rys. **6**) można podzielić na fale objętościowe rozchodzące się w gruncie i powietrzu (hałas) oraz fale powierzchniowe rozchodzące się wzdłuż powierzchni rozdzielających ośrodki o różnych właściwościach, w tym fale rozchodzące się na powierzchni gruntu.

Fale objętościowe podłużne P docierają do rejestratora drgań, do odbiornika jako pierwsze. Fale te powodują odchylenie drgania w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fal. Powodują ściskanie i rozciąganie ośrodka i rozchodzą się z prędkością c_L.

Fale objętościowe poprzeczne S docierają ze źródła do rejestratora drgań po fali P i mają prędkość c_S. Prędkość fal P i S zależy od wielkości parametrów sprężystych ośrodka i wraz ze zmianą tych parametrów prędkości te mogą różnić się znacznie, a szczególnie zmiany te mogą być związane np. ze wzrostem głębokości w gruncie [12].

Fale powierzchniowe: fale Rayleigha R i Love'a L mają długie okresy i zmienne amplitudy, przy czym amplituda ich drgań maleje wykładniczo wraz ze wzrostem głębokości.

Powierzchniowe fale Rayleigha R, których prędkość zależy od ich częstotliwości, rozchodzą się poziomo i wywołują zarówno pionowe, jak i poziome, lecz nie często poprzeczne ruchy powierzchni gruntu (rys. **6**). Przy czym pionowe i poziome składowe są przeciwne w fazie tak, że ruch cząstek jest eliptyczny – odbywa się po elipsie zorientowanej pionowo i która jest prostopadła do kierunku biegu fali. Pod wpływem tych drgań ziarna gruntu poruszają się po torach zbliżonych do elips, grunt zaś ulega silnemu rozluźnieniu. Fale Love'a L rozchodzą się również poziomo, przy czym wywołują poprzeczne, poziome ruchy cząstek (rys. **6**).

Z tego wynika, że w wielu przypadkach konieczne jest wzmocnienie podtorza, w tym z wykorzystaniem geosyntetyków. Porównanie skuteczności niektórych wzmocnień podłoża dla linii dużej prędkości przedstawiono np. w [20].

Uogólnione układy dynamiczne w nieklasycznym rachunku operatorów i ich zastosowanie

Uogólnione układy dynamiczne [13] pojęciowo związane są z nieklasycznym rachunkiem operatorów, który bazuje na trzech liniowych operacjach S, s, T i dwóch przestrzeniach liniowych L^1, L^0,. Zakładamy, że $L^1 \subset L^0$, $S:L^1 \rightarrow L^0$,, $T:L^0 \rightarrow L^1$, $s:L^1 \rightarrow \mathrm{Ker}S$ oraz dodatkowo, że ST = id, TS = id-s. Własności operacji S, T, s i ich różne reprezentacje można znaleźć w [2, 10, 13]. Co istotne: wspomniane operacje mogą być definiowane w dziedzinie ciągłej albo dyskretnej i wtedy prowadzą one odpowiednio do opisu z wykorzystaniem równań różniczkowych, różnicowych, bądź ich układów. W związku z tym mogą być wykorzystywane do opisu i analizy uogólnionych układów dynamicznych [13]. Takie podejście prowadzi do uogólnionego wzoru Taylora postaci

$$x = sx + TsSx + T^2 sS^2 x + \dots$$
$$\dots + T^{n-1} sS^{n-1} x + T^n sS^n x \quad , \qquad (1)$$

gdzie $x \in L^n \left\{ x \in L^{n-1} : Sx \in L^{n-1} \right\}$.

Uwaga! W ostatnim wzorze *x* nie oznacza współrzędnej punktu, lecz element dowolnej przestrzeni liniowej L^n zdefiniowanej wcześniej. Pokazuje to ogólność wzoru (1).

Okazuje się, że do analizy naszego problemu należy przyjąć jako operację S operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

lub operator d'Alemberta

$$\Box = \Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

i dobrać do nich operacje T i s.

Uwaga! W przypadku n=2 operator Laplace'a redukuje się do postaci $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, natomiast dla n=1 otrzymujemy tylko operację $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ i to zmienia równanie różniczkowe modelu [11]. W przypadku operacji $\Box$ (n=3) operacje T i s określone są odpowiednio wzorami

$$T\{f(P,t)\} = \left\{-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{Af(P_0,t)}{d(P,P_0)}d\Omega\right\}, \quad (2)$$

$$s\{u(P,t)\} = \left\{\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{1}{d(P,P_0)}A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - Au\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{d(P,P_0)}\right) + \frac{1}{ad(P,P_0)}A \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial d(P,P_0)}{\partial n}\right]d\sigma\right\} \quad (3)$$

gdzie: $L^0 = C^1$ ($\Omega\times<0,\infty)$), $L^1 = C^3$ ($\Omega\times<0,\infty)$), operacja A jest podstawieniem za t wartości $t - (d(P,P_0)/a)$ i $a \neq 0$ jest stałą charakteryzującą układ zastępczy

$$d(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną normalną, σ jest brzegiem zbioru Ω.

W każdej z opisywanych sytuacji w modelowaniu matematycznym występuje równanie różniczkowe cząstkowe $\Box u=f(x, y, z, t)$. W naszym przypadku opisuje ono układ zastępczy, w którym stała a charakteryzuje odpowiednio podłoże (podbudowę) z geosyntetykami, natomiast $f(x, y, z, t)$ charakteryzuje ciągłe obciążenie zastępcze. Wielkości te, muszą być wyznaczone empirycznie [7, 14, 17], w tym laboratoryjnie z wykorzystaniem aparatu trójosiowego lub aproksymowane przez parametry elementów składowych układu (rys. **3** i **4**), które w modelu mogą być traktowane jako połączone szeregowo lub równolegle i mogą tworzyć zastępczy układ dynamiczny [13].

Oczywiście x, y, z są współrzędnymi punktu $P \in \Omega$ w chwili t, a u jest funkcją odpowiedniej klasy w zbiorze $\Omega\times<0,\infty)$ i oznacza ugięcie (przemieszczenie, zmianę położenia punktów P). W naszym modelu wystarczy, że Ω jest graniastosłupem lub szczególności prostopadłościanem o odpowiednich wymiarach. Korzystając ze wzorów (1), (2), (3) możemy zapisać

$$u(x,y,z,t) = u(P,t) = \left\{\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{1}{d(P,P_0)}A\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - Au\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{d(P,P_0)}\right) + \frac{1}{ad(P,P_0)} \cdot A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial d(P,P_0)}{\partial n}\right]d\sigma\right\} + \left\{-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{Af(P_0,t)}{d(P_0,t)}d\Omega\right\} \quad (4)$$

czyli określić wartości funkcji u w leżącym wewnątrz obszaru Ω punkcie P w chwili t.

Ze wzoru (4) wynika, że jeżeli u_1 jest odpowiedzią układu swobodnego $u = 0$, tzn. jest falą sferyczną, natomiast u_2 jest odpowiedzią układu nieswobodnego z wymuszeniem (obciążeniem) $f(x,y,z,t)$, to odpowiedź u tego układu można przedstawić w postaci $u=u_1+u_2$. Jeżeli obciążenie zastępcze $f \in Ker^n$, to zgodnie ze wzorem (1) możemy zapisać:

$$u(P,t) = su + Tsf + T^2s^2f + \ldots + T^{n-1}s^{n-1}f,$$

gdzie T i s są określone odpowiednio wzorami (2) i (3).

Jak pokazano w [11] zmiana położenia punktów analizowanego podłoża, a w tym punktów z geosyntetyków może być szacowana przez fale sferyczne (funkcje sferyczne).

Uwaga! Wykorzystane układy dynamiczne można analizować też w przestrzeni wyników [13], która jest bogatsza w elementy niż przestrzeń wyjściowa.

Własności rozwiązań (4) [11] uprawniają do wykorzystania przedstawionych opisów matematycznych do modelowania zmian położenia punktów analizowanego obszaru Ω, a w szczególności interesujących nas punktów $(x, y, g(x, y))$ geosyntetyków, gdzie $z = g(x, y)$ jest równaniem powierzchni geosyntetyku, a (x, y) należą do zbioru $D \subset R^2$, który jest rzutem Ω na płaszczyznę XOY układu współrzędnych i punktów leżących w warstwach położonych dostatecznie blisko powierzchni geosyntetyku.

W celu przeprowadzenia identyfikacji modelu trzeba przeprowadzić badania eksperymentalne wykorzystując eksperyment czynny, bierny lub mieszany i przeprowadzić walidację modelu.

Dyskretyzacja problemu i układ dynamiczny dyskretny

Niech

$$x = i\Delta x;\ y = j\Delta y;\ z = k\Delta z;\ t = l\Delta t$$

gdzie Δx, Δy, Δz, Δt są odpowiednio przyrostami zmiennych x, y, z, t

oraz

$$u_{i,j,k,l} = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, l\Delta t),\ f_{i,j,k,l} = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, l\Delta t)$$

Zastępując pochodne cząstkowe ich ilorazami różnicowymi i wprowadzając w przestrzeni czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych operacje

$$S_1u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l}$$
$$S_2u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l}$$
$$S_3u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l}$$
$$S_4u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1}$$

albo

$$S_1u_{i,j,k,l} = u_{i+1,j,k,l} - u_{i,j,k,l}$$
$$S_1u_{i,j,k,l} = u_{i,j+1,k,l} - u_{i,j,k,l}$$
$$S_1u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k+1,l} - u_{i,j,k,l}$$
$$S_1u_{i,j,k,l} = u_{i,j,k,l+1} - u_{i,j,k,l}$$

możemy analizowane układy dynamiczne ciągłe zastąpić dyskretnymi układami dynamicznymi o parametrach rozłożonych, które można wykorzystać do badania w dziedzinie czterowskaźnikowych sygnałów dyskretnych lub do numerycznego wyznaczania ich odpowiedzi.

Podsumowanie

Przedstawiono metodę analizy problemu z wykorzystaniem nieklasycznego rachunku operatorów i uogólnionych układów dynamicznych.

Ogólnie przyjęty aparat matematyczny pokazuje szerokie możliwości tworzenia jednolitych opisów problemów inżynierskich w różnych dziedzinach: ciągłej i dyskretnej.

Wykorzystując wzór (4) można prowadzić analizę ilościową i jakościową problemu, po przeprowadzeniu identyfikacji, kalibracji i walidacji modelu, najlepiej z wykorzystaniem badań in situ w celu określenia parametrów układu zastępczego.

Wielkości $u(x, y, z, t)$ można wyznaczać numerycznie, a także z wykorzystaniem metod hybrydowych na bazie wzoru (4) lub wykorzystując układy dynamiczne dyskretne o parametrach rozłożonych przybliżające dany układ dynamiczny ciągły.

Otrzymane zależności można wykorzystywać do badań symulacyjnych i eksperymentalnych.

Wspomniane modele analogowe można wykorzystywać do określania awaryjności, niezawodności systemów transportowych, ich elementów oraz wykorzystać do planowania ich napraw bieżących i głównych.

Analizę problemu dodatkowo komplikuje wzajemne oddziaływanie poszczególnych elementów konstrukcji, przykładowo nawierzchni kolejowej, podtorza z geosyntetykami i podłoża gruntowego. Wyjściem z tej sytuacji jest wykorzystanie układów analogowych i zastępczych.◀

Materiały źródłowe

[1] American Petroleum Institute. API 653. Tank inspection, repair, altrenation and reconstruction. Washington, 2005.
[2] Bittner R. Operational calculus in linear spaces. Studia Mathematica, 1961, 20(1), 1-18.
[3] Hall L. Simulations and analyses of train - induced ground vibrations. A comparative study of two- and three-dimensional calculations with actual measurements (Dissertation). Division of Soil & Rock Mechanics, Department of Civil & Environmental Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, April 2000.
[4] Hamdan M.N., Abuzeid O., Al-Salaymeh A. Assessment of an edge type settlement of above ground liquid storage tanks using a simple beam model. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31(11), 2461-2474.
[5] Latha M.G., Murthy V.S. Effects of reinforcement form on the behavior of geosynthetic reinforced sand. Geotextiles and Geomembranes, 2007, 25(1), 23–32.
[6] Liang F.-Y., Chen L.-Z., Shi X.-G. Numerical analysis of composite piled raft with cushion subjected to vertical load. Computers and Geotechnics, 2003, 30(6), 443-453.
[7] Lunne P., Robertson P., Powell J. Cone penetration testing in geotechnical practice. Blackie Academic & Professional, London, 1997, 312.
[8] Meyer Z. Obliczenia inżynierskie osiadania fundamentów. ZAPOL Publishing, Szczecin, 2012.
[9] Mieloszyk E. , Milewska A., Abramski M. Pale CFGFRPT i ich zastosowanie w budowlach/obiektach offshore (maszynopis).
[10] Mieloszyk E. Application of non--classical operational calculus to solving some boundary value problem. Integral Transforms and Special Functions, 2000, 9(4), 287-292.
[11] Mieloszyk E., Grulkowski S. Generalized Taylor formula and shell structures for the analysis of the interaction between geosythetics and engineering structures of transportation lines. W: Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (red.) Shell Structures: Theory and Applications, vol. 4, Taylor & Francis, Londyn, 2018, 561-564.
[12] Mieloszyk E., Milewska A., Grulkowski S. Elastic waves in the railroad track substructures and its surroundings analyzed with non--classical operational methods. 5th International Conference on Road and Rail Infrastructure, W: Stjepan Lakušić (red.) Road and rail infrastructure V, Department of Transportation, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Zagreb, 2018, 1195-1201.
[13] Mieloszyk E., Nieklasyczny rachunek operatorów w zastosowaniu do uogólnionych układów dynamicznych. Instytut Maszyn Przepływowych, Polska Akademia Nauk, 2008.
[14] Moravčik M. Experimental investigation of the vehicle – rail interaction. Third International Conference on Traffic Effects On Structures and Environment - TESE'94, Vol. 1, Sept. 1994.
[15] Nguyen D.D.C, Jo S.-B., Kim, D.-S. Design method of piled-raft foundations under vertical load considering interaction effects. Computers and Geotechnics, 2013, 47, 16-27.
[16] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K. Macierzowa analiza konstrukcji. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa-Poznań, 1979, 357.
[17] PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Warunki techniczne utrzymania podtorza kolejowego. Id-3, Załącznik do zarządzenia Nr 9/2009 Zarządu PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. z dnia 4 maja 2009 r., PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Centrala - Biuro Dróg Kolejowych, 2009.
[18] Randolph M.F., Clancy P. An approximate analysis procedure for piled raft foundations. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1993, 17(12), 849-869.
[19] Wiłun Z. Zarys geotechniki. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005, 724.
[20] Woldringh R. F., New B. M. Embankment design for high speed trains on soft soils. Barends i in. (red.) Geotechnical engineering for transportation infrastructure, Balkema, Rotterdam, 1999.
[21] Yamashita K., Yamada T., Hamada J. Investigation of settlement and load sharing on piled rafts by monitoring full-scale structures. Soils and Foundations, 2011, 51(3), 513-532.

Drgania płyty z wypełnieniem sprężystym spoczywającej na podłożu Winklera wywołane ruchomym oscylatorem

Vibrations of the plate with elastic core resting on the Winkler foundation caused by a moving oscillator

Magdalena Ataman

Dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

Wacław Szcześniak

Prof. dr hab. inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

w.szczesniak @il.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy rozważana jest konstrukcja składająca się z dwóch płyt Kirchhoffa połączonych warstwą wypełnienia sprężystego Winklera. Układ płyt spoczywa na podłożu Winklera i obciążony jest jednomasowym oscylatorem lepkosprężystym, poruszającym się ze stałą prędkością po górnej płycie, równolegle do jednego z boków. Analizowane są drgania wymuszone i drgania swobodne płyt oraz oscylatora. W przypadku tak złożonego układu ruch płyt jest opisany dwoma sprzężonymi równaniami różniczkowymi lub jednym równaniem różniczkowym zawyżonego rzędu. Ponadto ze względu na charakter ruchomego obciążenia (obciążenie inercyjne) równania te mają zmienne, zależne od czasu współczynniki. Otrzymane rozwiązania zilustrowano przykładami obliczeniowymi.

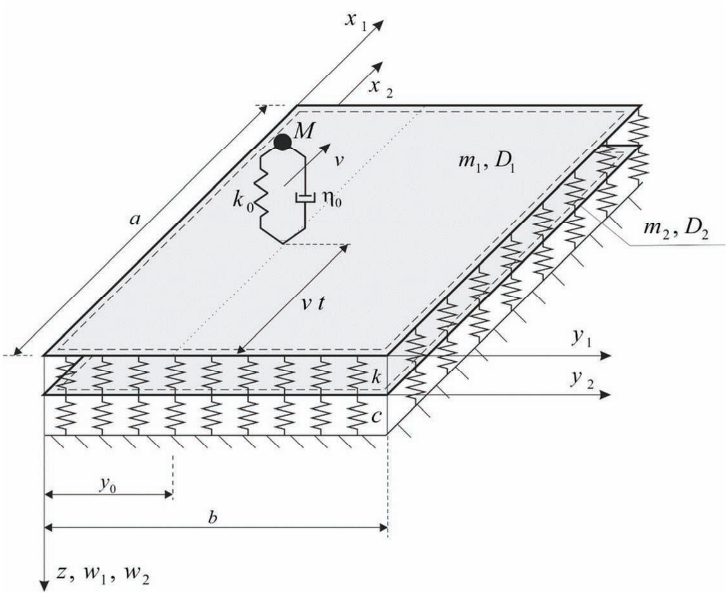
Słowa kluczowe: *Drgania płyty z wypełnieniem sprężystym; Podłoże Winklera; Ruchomy oscylator*

Abstract: In the paper a structure consisting of two Kirchhoff plates connected by an elastic Winkler layer is considered. The structure rests on the Winkler foundation and is subjected to a one-mass visco-elastic oscillator, moving at a constant speed on the upper plate, parallel to one of the plate sides. Forced and free vibrations of the plates and the oscillator are analysed. In the case of such a complex system vibration of the plates is described by two coupled differential equations, or one differential equation with elevated order. In addition, due to the nature of the moving load (inertial load), these equations have variable, time-dependent coefficients. The solutions are illustrated by numerical examples.

Keywords: *Vibration of plate with elastic core; Winkler foundation; Moving oscillator*

Konstrukcje warstwowe, a szczególnie płyty, mają szerokie zastosowanie w budownictwie drogowym, mostowym oraz lotniskowym. W literaturze istnieje wiele prac dotyczących zagadnień belek oraz płyt warstwowych. W skład tych opracowań wchodzą zarówno monografie, prace przeglądowe jak i oryginalne rozprawy naukowe. Belki i płyty warstwowe są przedmiotem analizy między innymi prac [1-10]. Analizowane w nich są zagadnienia obciążeń ruchomych, umiarkowanie dużych ugięć, wpływy termiczne, wpływy podłoża sprężystego, nieliniowość fizyczna materiału i inne.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie analizy dynamicznej płyty warstwowej, spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym oscylatorem jednomasowym. Rozważamy dwie płyty połączone warstwą wypełnienia sprężystego Winklera. Omawiany układ spoczywa na podłożu Winklera. Konstrukcja obciążona jest jednomasowym oscylatorem lepkosprężystym poruszającym się ze stałą prędkością po górnej płycie, równolegle do osi x_1 (rys. **1**). W pracy prze-



***1**. Schemat dynamiczny układu płyty – podłoże sprężyste Winklera obciążonego ruchomym oscylatorem jednomasowym* analizowano drgania wymuszone oraz drgania swobodne układu płyt i oscylatora.

Równania ruchu oscylatora oraz układu płyt na podłożu Winklera

Rozważamy małe drgania prostokątnej płyty składającej się z trzech warstw, spoczywającej na podłożu Winklera o współczynniku sprężystości c (rys. **1**). Warstwę górną i dolną stanowią jednorodne, sprężyste, cienkie płyty Kirchhoffa o grubości h_1 oraz h_2 Równomiernie rozłożone masy jednostkowe i sztywności tych płyt wynoszą odpowiednio m_1 i D_1 oraz m_2 i D_2. Płyty połączone są ze sobą wypełnieniem sprężystym Winklera o współczynniku sprężystości k. Wypełnienie przenosi tylko ściskanie lub rozciąganie. Obciążenie układu stanowi ruchomy oscylator jednomasowy o masie M, poruszający się po powierzchni górnej płyty, równolegle do osi x_1 ze stałą prędkością v. Ugięcie powierzchni środkowej górnej płyty opisuje współrzędna w_1, powierzchni środkowej dolnej płyty współrzędna w_2, a ugięcie masy oscylatora współrzędna w.

Ruch drgający układu płyta warstwowa – oscylator jednomasowy, w przypadku gdy oscylator porusza się po płycie równolegle do osi x_1, opisują równania różniczkowe (1).

W powyższych wzorach $N(t)$ jest naciskiem dynamicznym ruchomego oscylatora jednomasowego na płytę.

Pochodna materialna w równaniach (1), w przypadku stałej prędkości oscylatora, określona jest następującym wzorem:

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w_1}{\partial t}+v\frac{\partial w_1}{\partial x}. \tag{2}$$

Pierwsze z równań (1) jest równaniem lepkosprężystego oscylatora jednomasowego względem położenia równowagi statycznej. Związek (2) wykorzystano w równaniu ruchu oscylatora. Różniczkowe równania ruchu (1) rozważanego układu trzywarstwowego są równaniami cząstkowymi czwartego rzędu ze względu na zmienne geometryczne x i y oraz drugiego ze względu na czas t. Równania te są ze sobą sprzężone.

$$\begin{gathered}
M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\eta_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t}\right)+k_0\left(w-w_1\right)=0,\\
D_1\nabla^4w_1\left(x,y,t\right)+m_1\frac{\mathrm{d}^2w_1\left(x,y,t\right)}{\mathrm{d}t^2}+k\left[w_1\left(x,y,t\right)-w_2\left(x,y,t\right)\right]=p_1\left(x,y,t\right),\\
D_2\nabla^4w_2\left(x,y,t\right)+m_2\frac{\mathrm{d}^2w_2\left(x,y,t\right)}{\mathrm{d}t^2}+k\left[w_2\left(x,y,t\right)-w_1\left(x,y,t\right)\right]+cw_2\left(x,y,t\right)=0,
\end{gathered} \tag{1}$$

gdzie:

$$p_1(x,y,t)=N(t)\delta(x-vt)\delta(y-y_0)=\left[Mg-M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\right]\delta(x-vt)\delta(y-y_0).$$

Rozwiązanie równań ruchu płyt obciążonych ruchomym oscylatorem

Sprzężone równania różniczkowe ruchu górnej i dolnej płyty (1) można sprowadzić do dwóch niezależnych równań z jedną niewiadomą w_1 lub w_2. Niewiadome ugięcia w_1 i w_2 powiązane są zależnością wynikającą z trzeciego z równań (1):

$$w_1(x,y,t)=\left(1+\frac{c}{k}\right)w_2(x,y,t)+\frac{D_2}{k}\nabla^4w_2(x,y,t)+\frac{m_2}{k}\frac{\partial^2w_2(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

Wykorzystując (2) w pierwszym równaniu (1) oraz podstawiając (3) do dwóch pierwszych równań (1) otrzymujemy układ dwóch równań opisujący ruch oscylatora oraz dolnej płyty w następującej postaci (4).

$$\begin{gathered}
M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\eta_0\left\langle\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\left\{\left(1+\frac{c}{k}\right)\frac{\partial w_2}{\partial t}+\frac{D_2}{k}\nabla^4\left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)+\frac{m_2}{k_1}\frac{\partial^3w_2}{\partial t^3}+\right.\right.\\
\left.\left.+v\left[\left(1+\frac{c}{k}\right)\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{D_2}{k}\nabla^4\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)+\frac{m_2}{k}\frac{\partial^3w_2}{\partial t^2\partial x}\right]\right\}\right\rangle+\\
+k_0\left\{w-\left[\left(1+\frac{c}{k}\right)w_2+\frac{D_2}{k}\nabla^4w_2+\frac{m_2}{k}\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}\right]\right\}=0,\\
\frac{D_1D_2}{k}\nabla^4\left(\nabla^4w_2\right)+\frac{1}{k}\left(D_1m_2+D_2m_1\right)\nabla^4\left(\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}\right)+\left[D_1\left(1+\frac{c}{k}\right)+D_2\right]\nabla^4w_2+\\
+\left[m_1\left(1+\frac{c}{k}\right)+m_2\right]\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}+\frac{m_1m_2}{k}\frac{\partial^4w_2}{\partial t^4}+cw_2=\\
=\left[Mg-M\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right]\delta\left(x-vt\right)\delta\left(y-y_0\right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Równanie opisujące drgania dolnej płyty $(4)_2$ jest równaniem różniczkowym ósmego rzędu i pozostaje sprzęgnięte z równaniem oscylatora $(4)_1$, które jest rzędu piątego.

Rozwiązania układu równań (4) poszukujemy metodą rozdzielenia zmiennych Fouriera zakładając rozwiązanie w postaci podwójnego szeregu:

$$w_2(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}(t)\sin\alpha_m x\sin\beta_n y \tag{5}$$

gdzie:

$f_{mn}(t)$ – nieznana funkcja czasu.

Następnie stosujemy algorytm ortogonalizacyjny do rozwiązania równań ruchu oscylatora i płyty uwzględniając tylko jeden wyraz podwójnego szeregu $m = n = 1$. Równania ruchu oscylatora i górnej płyty w postaci bezwymiarowej zapisujemy w sposób (6):

gdzie:

$\xi=\frac{vt}{a},\eta=\frac{y_0}{b}$ – współrzędne bezwymiarowe,

$w^{st}=\frac{Mg}{k_0}$ – ugięcie statyczne oscylatora,

$$w_2^{\mathrm{st}} = \frac{4Mg}{ab\left\{\dfrac{D_1 D_2}{k}\gamma_{11}^8 + \left[D_1\left(1+\dfrac{c}{k}\right)+D_2\right]\gamma_{11}^4 + 2c\right\}}$$

– ugięcie statyczne środka dolnej płyty, wywołane ciężarem oscylatora,
$g_{11}(\xi)$ – bezwymiarowe ugięcie dolnej płyty,
$g_0(\xi)$ – bezwymiarowe przemieszczenie pionowe masy *M* oscylatora,

$$\gamma_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\,.$$

Otrzymany bezwymiarowy układ równań ruchu oscylatora i dolnej płyty jest układem różniczkowych równań zwyczajnych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach z niewiadomymi funkcjami $g_0(\xi)$ i $g_{11}(\xi)$. Rozwiązanie tego układu oraz wyniki graficzne można otrzymać w prosty sposób, np. korzystając z programu MATHEMATICA. Wyznaczona funkcja $g_{11}(\xi)$ jest funkcją ugięcia płyty stanowiącej dolną warstwę układu trzywarstwowego. W celu uzyskania wykresów ugięć górnej płyty należy po wyznaczeniu funkcji $g_{11}(\xi)$ powrócić do współrzędnej w_2 (x,y,t), a następnie korzystając ze wzoru (3) obliczyć funkcję w_1 (x,y,t). Ugięcie górnej warstwy płyty w_1 (x,y,t) można również przedstawić w formie bezwymiarowej, wprowadzając współrzędne bezwymiarowe ξ oraz $\tilde{g}_{11}(\xi)$, przy czym funkcję $\tilde{g}_{11}(\xi)$ należy odnieść do ugięcia statycznego dolnej płyty, wywołanego siłą M_g przyłożoną do górnej warstwy układu.

Rozwiązanie układu trzech równań ruchu sprowadziło się zatem do rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych ósmego rzędu ze względu na zmienne geometryczne *x* i *y* oraz czwartego ze względu na czas *t*. Wyznaczenie ugięć obu płyt oraz przemieszczenia pionowego masy oscylatora możliwe jest również poprzez rozwiązanie układu trzech cząstkowych równań różniczkowych czwartego rzędu ze względu na zmienne *x* i *y* oraz drugiego rzędu ze względu na czas *t*. Równania te są ze sobą sprzężone.

Omówione powyżej rozwiązania obowiązują wtedy, gdy ruchomy

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\eta_0 a}{M v}\frac{\mathrm{d} q_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{k_0 a^2}{M v^2} q_0(\xi) =$$
$$= \sin\pi\eta\,\frac{w_2^{\mathrm{st}}}{w^{\mathrm{st}}}\left[\frac{\eta_0 m_2 v}{M k a}\sin\pi\xi\,\frac{\mathrm{d}^3 q_{11}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^3} + \frac{m_2}{M k}\left(\eta_0 v\frac{\pi}{a}\cos\pi\xi + k_0\sin\pi\xi\right)\frac{\mathrm{d}^2 q_{11}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \right.$$
$$+\frac{\eta_0 a}{M v}\left(1+\frac{c}{k}+\frac{D_2}{k}\gamma_{11}^4\right)\sin\pi\xi\,\frac{\mathrm{d} q_{11}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} +$$
$$+\frac{a^2}{M v^2}\left(1+\frac{c}{k}+\frac{D_2}{k}\gamma_{11}^4\right)\left(\eta_0 v\frac{\pi}{a}\cos\pi\xi + k_0\sin\pi\xi\right) q_{11}(\xi), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 q_{11}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{k a^2}{v^2 m_1 m_2}\left[\frac{1}{k}\left(D_1 m_2 + D_2 m_1\right)\gamma_{11}^4 + m_1\left(1+\frac{c}{k}\right) + m_2\right]\frac{\mathrm{d}^2 q_{11}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} +$$
$$+\frac{k a^4}{v^4 m_1 m_2}\left\{\frac{D_1 D_2}{k}\gamma_{11}^8 + \left[D_1\left(1+\frac{c}{k}\right)+D_2\right]\gamma_{11}^4 + 2c\right\} q_{11}(\xi) =$$
$$= \frac{1}{w_2^{\mathrm{st}}}\,\frac{4 k a^3 \sin\pi\xi\,\sin\pi\eta}{b m_1 m_2 v^4}\left(Mg - \frac{M v^2}{a^2} w^{\mathrm{st}}\frac{\mathrm{d}^2 q_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right),$$

oscylator znajduje się na płycie tzn. w przypadku, gdy współrzędna bezwymiarowa ξ zawiera się w przedziale $0 \le \xi \le 1$.

Po zjechaniu oscylatora z konstrukcji, przy $\xi > 1$ płyta wykonuje drgania swobodne. Drgania swobodne środka dolnej płyty opisuje wyrażenie:

$$q_{11}^{\mathrm{sw}}(\xi) = \frac{w_2^{\mathrm{sw}}(t)}{w_2^{\mathrm{st}}} = \frac{1}{w_2^{\mathrm{st}}}\left(K_1\cos\omega_{11}^{(1)}t + \right.$$
$$\left. + L_1\sin\omega_{11}^{(1)}t + K_2\cos\omega_{11}^{(2)}t + L_2\sin\omega_{11}^{(2)}t\right) \tag{7}$$

W równaniu (7) $\omega_{11}^{(1)}$ i $\omega_{11}^{(2)}$ są częstościami drgań własnych dolnej płyty:

$$\omega_{11}^{(1)} = \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}},\qquad \omega_{11}^{(2)} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}} \tag{8}$$

gdzie:

$$A = \frac{k}{m_1 m_2}\left[\frac{1}{k}\left(D_1 m_2 + D_2 m_1\right)\gamma_{11}^4 + m_1\left(1+\frac{c}{k}\right) + m_2\right]$$

$$B = \frac{D_1 D_2}{m_1 m_2}\gamma_{11}^8 + \frac{k}{m_1 m_2}\left[D_1\left(1+\frac{c}{k}\right)+D_2\right]\gamma_{11}^4 + c\,.$$

Rozważana płyta jest zatem układem dwumodalnym. Z równań (8) wynika, że drgania własne istnieją, gdy spełniony jest warunek $A^2 > 4B$. W przypadku $A^2 = 4B$ otrzymujemy dodatkowe pasmo drgań własnych o częstości

$$\omega_{11}^{(3)} = \sqrt{\frac{A}{2}} \tag{9}$$

W rozważanym zadaniu można tak dobrać parametry materiałowe płyt, żeby płyta górna nie miała ugięć. W takim przypadku płyta dolna jest absorberem mechanicznym drgań wymuszonych.

Przykład obliczeniowy

Ponieważ rozważany układ równań ruchu (6) jest układem równań różniczkowych, liniowym, czwartego rzędu, o zmiennych współczynnikach, został rozwiązany numerycznie przy pomocy programu Mathematica. Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

- wymiary płyt w planie $a \times b$ = 5,00m x 7,00m,
- grubość górnej płyty h_1 = 0,18m,
- moduł sprężystości górnej płyty E_1 = 38600 MPa,
- masa przypadająca na jednostkę powierzchni górnej płyty m_1 = 4500kg/m²,
- współczynnik Poissona górnej płyty v_1 = 0,167,
- grubość dolnej płyty h_2 = 0,20m,
- moduł sprężystości dolnej płyty E_2 = 23100 MPa,
- masa jednostkowa dolnej płyty m_2 = 4000kg/m²,
- współczynnik Poissona dolnej płyty v_2 = 0,167,
- współczynnik sprężystości podłoża Winklera c = 110MN/m³,
- masa resorowana oscylatora M =

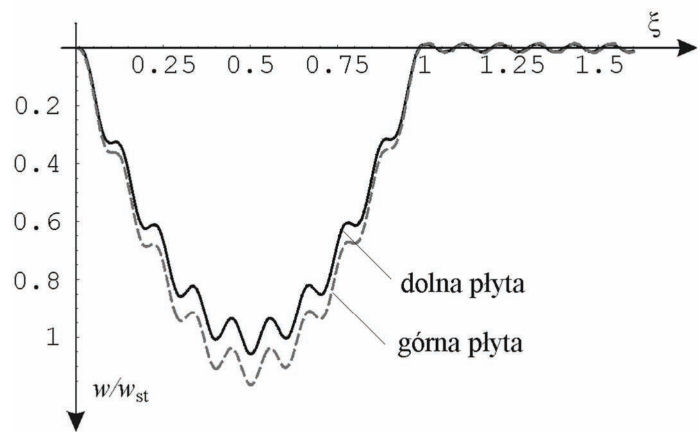
11723kg,
- współczynnik tłumienia oscylatora $\eta_0 = 40$kNs/m,
- współczynnik sprężystości oscylatora $k_0 = 2000$kN/m,
- współczynnik sprężystości wypełnienia Winklera $k = 1100$MN/m^3.

Wyniki zilustrowano wykresami przedstawionymi na rysunkach **2**-**8**. Na rysunkach **2**-**4** pokazano ugięcia górnej i dolnej płyty we współrzędnych bezwymiarowych przy prędkości oscylatora v = 50km/h, v = 100km/h i v = 150km/h. Rysunki **5** i **6** ilustrują odpowiednio wpływ prędkości i współczynnika sprężystości podłoża oscylatora na jego na przemieszczenie pionowe masy M. Natomiast na rysunkach **7** i **8** pokazano wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka górnej i dolnej płyty.

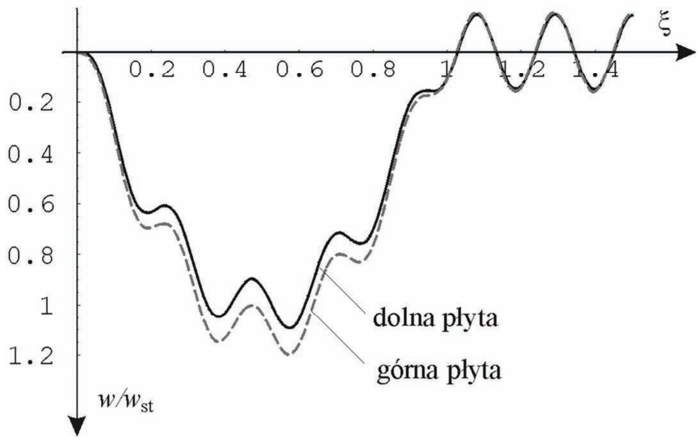
Wnioski

Otrzymany układ dwóch bezwymiarowych równań ruchu (6) jest układem zwyczajnych, liniowych równań różniczkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Jako rozwiązanie otrzymujemy bezwymiarowe wyrażenia $g_0(\xi)$ i $g_{11}(\xi)$ opisujące odpowiednio przemieszczenie pionowe oscylatora i ugięcie dolnej płyty. Mając rozwiązanie równań (6) można wyznaczyć ugięcie górnej płyty korzystając z zależności (3). Przedstawione w pracy wyniki można otrzymać również rozwiązując układ trzech równań różniczkowych czwartego rzędu, sprzężonych ze sobą.

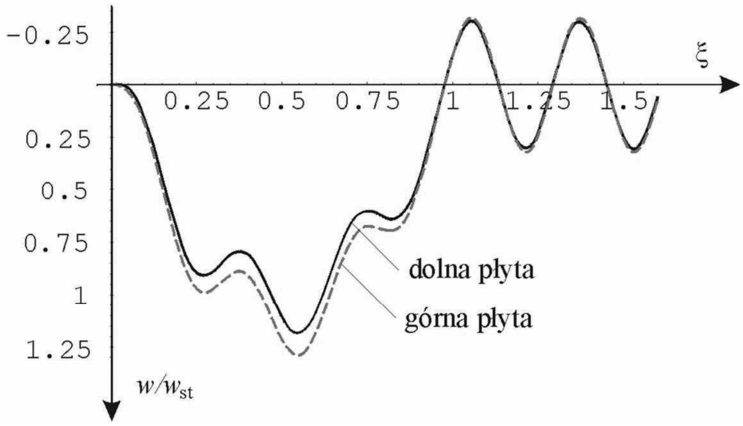
Analizowany układ płyt jest układem dwumodalnym. Istnieje możliwość takiego dobrania parametrów mechanicznych konstrukcji, aby ugięcia górnej płyty, po której porusza się obciążenie były zerowe. Takie przypadki, stanowiące mechaniczne tłumiki drgań, były przedmiotem opracowań między innymi Oniszczuka [5]. ◀



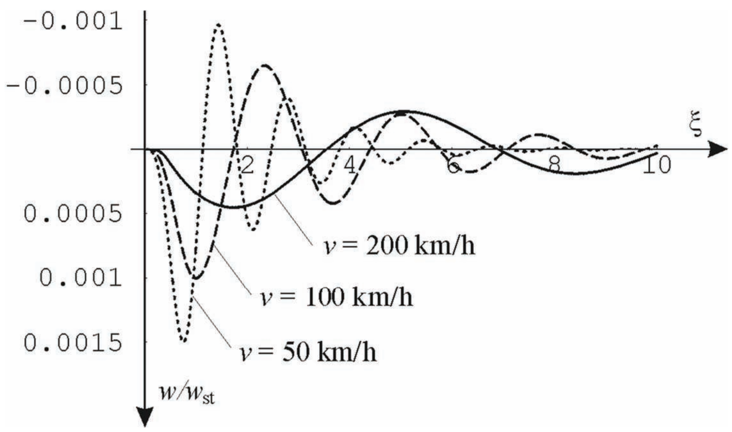
***2**. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 50 km/h, $0 \le \xi \le 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne*



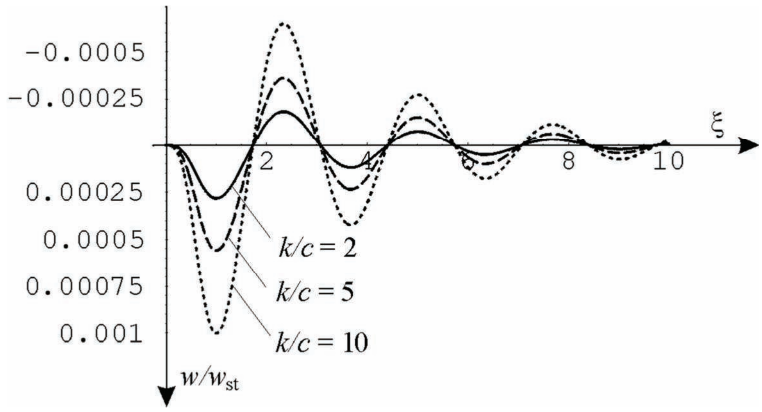
***3**. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 100 km/h, $0 \le \xi \le 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne*



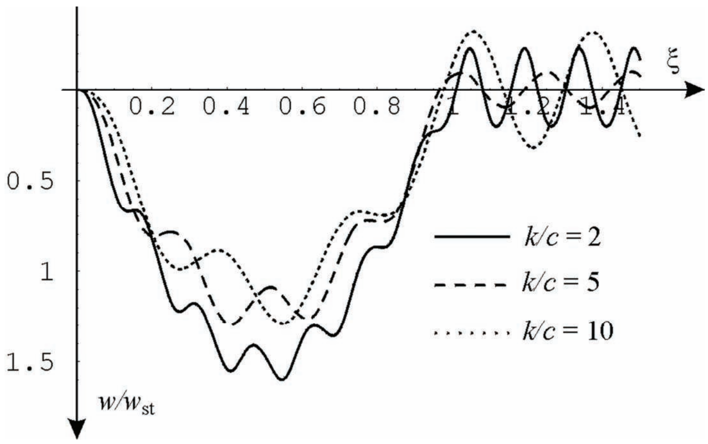
***4**. Ugięcie środka płyty warstwowej obciążonej oscylatorem poruszającym się z prędkością 150 km/h, $0 \le \xi \le 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne*



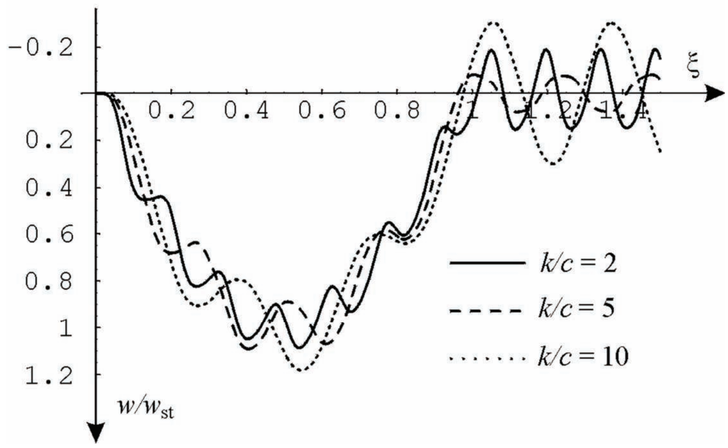
***5**. Wpływ prędkości oscylatora na jego przemieszczenie pionowe*



***6**. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na przemieszczenie pionowe masy M oscylatora poruszającego się z prędkością v = 100 km/h, przy stałej wartości współczynnika sprężystości wypełnienia k = 1100MN/m^3*



***7**. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka górnej płyty, prędkość v = 150 km/h, współczynnik sprężystości wypełnienia k = 1100MN/m^3*



***8**. Wpływ współczynnika sprężystości podłoża c na ugięcie środka dolnej płyty, prędkość v = 150 km/h, współczynnik sprężystości wypełnienia k = 1100MN/m^3*

Materiały źródłowe

[1] Ataman M. Analiza drgań belki warstwowej na podłożu Winklera obciążonej ruchomym oscylatorem. Księga Konferencyjna 11-go Seminarium Polsko-Ukraińskiego, Theoretical Foundations of Civil Engineering, OWPW, Warszawa 2003, str. 261-268.

[2] Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Academia, Prague 1999.

[3] Hoop T. Konstrukcje warstwowe. Arkady, Warszawa 1980.

[4] Mead D.J., Markus S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. Journal of Sound and Vibration, 1969, 10, pp. 163-175.

[5] Oniszczuk Z. Analiza drgań złożonych układów ciągłych z więzami sprężystymi. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1997.

[6] Rao D.K. Forced vibrations of a damped sandwich beam subjected to moving forces. Journal of Sound and Vibration, 1977, 54 (2), pp. 215-227.

[7] Szcześniak W. Drgania płyty zespolonej z wypełnieniem Winklera wywołane ruchomą siłą skupioną Księga Konferencyjna Seminarium Polsko-Rosyjskiego, Teoretyczne Podstawy Budownictwa, Moskwa 1996, str. 122-137.

[8] Szcześniak W. Drgania belki sandwiczowej pod wpływem ruchomego obciążenia skupionego. Prace Naukowe PW, Budownictwo, z. 132, 1998, str. 111-151.

[9] Szcześniak W. Drgania płyty sandwiczowej pod wpływem ruchomego obciążenia bezinercyjnego. Prace Naukowe PW, Budownictwo, z. 132, 1998, str. 153-172.

[10] Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных ортотропных пластин с жестким заполнителем. Проблемы устойчивости в строителной механике. Ред. В.В. Болотин, Издат. литерат. по строительству, Москва 1965.

Zmiana więzów w linowych strukturach przegubowych

Change of constraints in rope articulated structures

Wacław Szcześniak

Prof. dr hab. inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

w.szczesniak @il.pw.edu.pl

Magdalena Ataman

Dr inż.

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska

m.ataman@il.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy przeanalizowano cztery przykładowe płaskie i przestrzenne układy materialne, w których nagle usunięto część więzów. Analizowano prostą strukturę składającą się z dwóch lin i punktu materialnego, strukturę przestrzenną złożoną z trzech nieważkich lin i punktu materialnego, belkę podwieszoną na dwóch linach oraz tarczę kołową również podwieszoną na dwóch linach. We wszystkich przypadkach nagle przecięto jedną z lin. Rozwiązania uzyskano metodą analityczną, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszeń. Uzyskane wyniki zilustrowano wykresami przyspieszeń, przyspieszeń kątowych i sił działających w rozważanych układach.

Słowa kluczowe: *Struktury przegubowe; Zmiana więzów; Chwilowy środek przyspieszenia*

Abstract: In the paper four examples of two-dimensional and three-dimensional material systems, in which some of constraints were suddenly removed, are analyzed. A simple structure consisting of two ropes and a particle, a spatial structure consisting of three weightless ropes and a particle, and a beam suspended on two ropes and a circular shield, also suspended on two ropes, were analyzed.. In all cases one of the ropes was suddenly cut. Solutions were obtained by the analytical method, using the properties of the instantaneous center of acceleration. The obtained results are illustrated by diagrams of accelerations, angular accelerations and forces acting in the considered systems.

Keywords: *Articulated structures; Change of constraints; Instantaneous center of acceleration*

Nagła zmiana więzów w konstrukcjach budowlanych często prowadzi do stanów awaryjnych i katastrofalnych obiektów inżynierskich [3]. Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są płaskie i przestrzenne układy materialne. Rozwiązano cztery przykładowe struktury, w których nagle usunięto część więzów. W chwili początkowej $t = 0^+$, tuż po zmianie więzów, wyznaczono przyspieszenia, a także układ wszystkich reakcji zewnętrznych oraz sił wewnętrznych w nierozciągliwych linach. Zadania rozwiązano metodą analityczną korzystając z własności chwilowego środka przyspieszeń [10-15]. Należy podkreślić, że w chwili $t = 0^+$ w układzie nie występują jeszcze żadne prędkości i prędkości kątowe, natomiast są już przyspieszenia oraz siły zewnętrzne i wewnętrzne w osłabionym układzie materialnym. W takich przypadkach chwilowy środek obrotu (prędkości) pokrywa się z chwilowym środkiem przyspieszenia.

Nagła zmiana więzów punktu materialnego podwieszonego na dwóch oraz na trzech linach

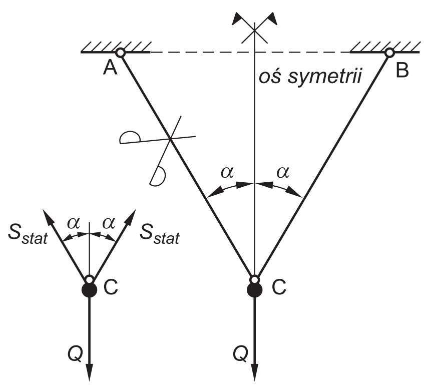
Rozważmy płaską strukturę pokazaną na rysunku **1**, z punktem materialnym C o ciężarze *Q*. Początkowo (przed usunięciem więzów) siły w obu linach są jednakowe. Wyznaczamy je z równowagi statycznej węzła C mamy równanie, z którego wyznaczymy statyczne siły wewnętrzne jednakowe w obu prętach:

$$2S_{\text{stat}}\cos\alpha = Q \;\rightarrow\; S_{\text{stat}} = \frac{Q}{2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

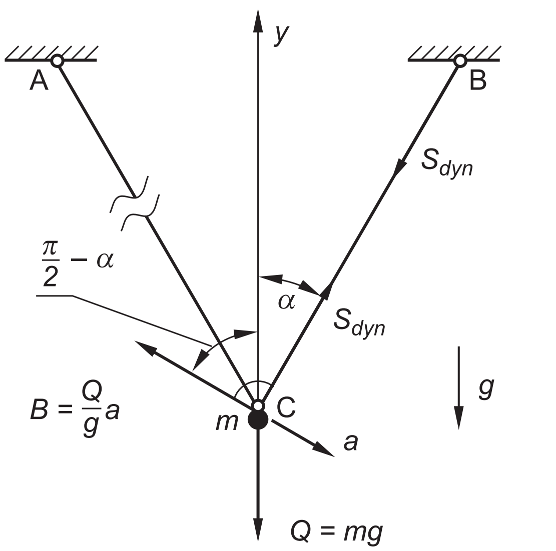
Tuż po przecięciu linki AC w układzie nie ma jeszcze prędkości, natomiast jest już przyspieszenie *a* punktu materialnego o ciężarze *Q*. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku **2**, z równań kinetostatyki węzła C znajdujemy siłę S_{dyn} w nie przeciętym pręcie:

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; S_{\text{dyn}}\cos\alpha + \frac{Q}{g}a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = Q$$

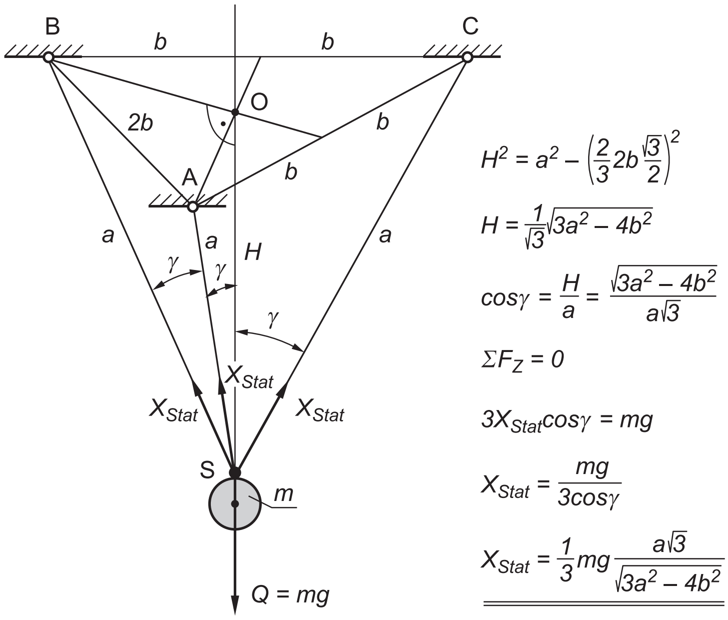
$$\rightarrow\; S_{\text{dyn}} = \frac{Q}{\cos\alpha}\left(1-\frac{a}{g}\sin\alpha\right) \qquad (2)$$



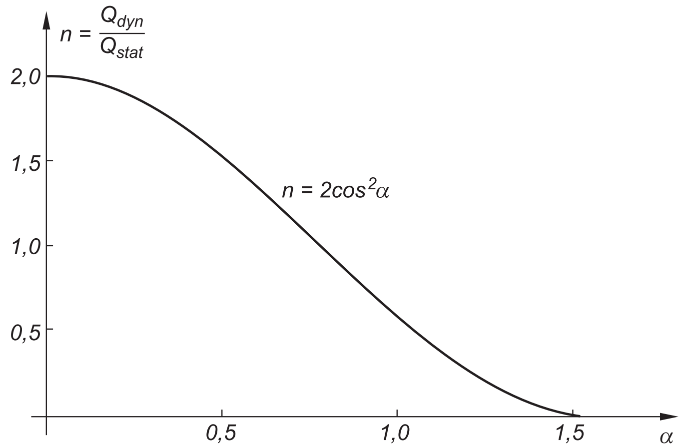
1. Schemat statyczny płaskiej struktury przed przecięciem linki AC



2. *Schemat dynamiczny płaskiej struktury po przecięciu linki AC*



4. *Przestrzenna struktura prętowa przed przecięciem linki BS*



3. *Wykres współczynnika dynamicznego czyli funkcji n = n(α), w zależności od kąta α ∈ <0,π/2>*

Przyspieszenie *a* wyznaczymy, wykorzystując równanie kinetostatyki sumy momentów wszystkich sił względem punktu B (rys. **2**) poziomego stropu w chwili $t = 0^+$:

$$\sum M_{\mathrm{B}} = 0 \;\rightarrow\; Q\,l\sin\alpha - \frac{Q}{g}a\,l = 0 \;\rightarrow\; a = g\sin\alpha. \tag{3}$$

$$\sum F_z = 0 \;\rightarrow\; 3X_{\mathrm{stat}}\cos\gamma = Q \;\rightarrow\; X_{\mathrm{stat}} = \frac{Q}{3\cos\gamma} = \frac{mg}{3\cos\gamma},$$
$$H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2 - 4b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3a}\sqrt{3a^2 - 4b^2}, \tag{5}$$
$$X_{\mathrm{stat}} = \frac{1}{3}mg\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

$$\sum F_z = 0 \;\rightarrow\; 2Y_{\mathrm{dyn}}\cos\gamma + mp\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = mg \;\rightarrow\; 2Y_{\mathrm{dyn}}\cos\gamma + mp\sin\beta = mg,$$
$$\sin\beta = \frac{\frac{1}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{b\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad h = \sqrt{3a^2 - 4b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{a\sqrt{3}}. \tag{6}$$

$$\sum M_{\mathrm{AC}} = 0 \;\rightarrow\; mg\frac{1}{3}2b\frac{\sqrt{3}}{2} = mph \;\rightarrow\; p = \frac{bg\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{7}$$

Stosunek siły dynamicznej w lince BC do siły statycznej w tej lince znajdujemy w następujący sposób:

$$n = \frac{S_{\mathrm{dyn}}}{S_{\mathrm{stat}}} = 2(\cos\alpha)^2. \tag{4}$$

Wykres funkcji $n = n(\alpha)$, przy $\alpha \in$ <0,π/2> pokazano na rysunku **3**.

Rozpatrzymy teraz strukturę przestrzenną złożoną z trzech linek, zamocowanych przegubowo w sztywnym poziomym stropie w punktach A, B i C, a zbiegających się do punktu S, w którym podwieszono punkt materialny o masie *m*. Liny mają jednakową długość *a*, zaś punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta równobocznego o zadanej długości boku równej 2*b*, jak na rysunku **4**. Układ pozostaje w równowadze w polu grawitacyjnym ziemskim. W pewnej chwili przecięto raptownie linkę SB. Wyznaczymy stosunek siły dynamicznej do siły statycznej w każdej nieprzeciętej lice.

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku **4**, w przypadku statycznym, z uwagi na symetrię układu względem osi pionowej, przechodzącej przez punkt S, siły od obciążenia statycznego w trzech linach są jednakowe i możemy je wyznaczyć z równania równowagi (5) wyciętego węzła S:

Po raptownym przecięciu linki BS, zgodnie z oznaczeniami na rysunku **5**, układ sił w węźle S ulega zmianie.

Brak jest jeszcze prędkości w układzie, natomiast występuje już przyspieszenie punktu materialnego o masie *m*, które będziemy oznaczać literką *p*. Pozorna siła bezwładności d'Alemberta $B = m\,p$ jest prostopadła do wysokości *h* trójkąta ACS. W węźle S występują teraz cztery siły: dwie siły Y_{dyn} w pozostałych dwóch linach, siła bezwładności *B* oraz ciężar punktu materialnego $Q = m\,g$. Suma rzutów miar sił na pionową oś symetrii prowadzi do następującego równania równowagi kinetostatycznej (równanie 6):

Brakujące we wzorach (5) i (6) przyspieszenie *p* wyznaczymy z równania kinetostatyki sumy momentów względem osi AC prostopadłej do wysokości *h* i do wektora siły bezwładności *B*. Mamy zatem równanie (7). Wstawiając teraz *p*, cosγ, sinβ do równania równowagi kineto-stycznej (6)2 otrzymamy jedno równanie z niewiadomą siłą Y_{dyn}, występującą w każdej z pozostałych dwóch linek, a zatem:

$$2Y_{\mathrm{dyn}}\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{a\sqrt{3}}+m\frac{b^2g}{3\left(a^2-b^2\right)}=mg,$$

$$Y_{\mathrm{dyn}}=mg\frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2-b^2}}\,\frac{3a^2-4b^2}{2\left(a^2-b^2\right)}. \qquad (8)$$

Iloraz siły dynamicznej Y_{dyn} do siły statycznej X_{stat} w lince jest następujący:

$$n=\frac{Y_{\mathrm{dyn}}}{X_{\mathrm{stat}}}=\frac{3a^2-4b^2}{2\left(a^2-b^2\right)}. \qquad (9)$$

W szczególnym przypadku, jeśli $a = 2b$, odpowiedź (9) daje $n = 4/3$.

Belka podwieszona na linach

Niech pozioma belka AB o masie *m* i długości 2*l* wisi na dwóch nierozciągliwych linkach, zbiegających się w punkcie O. W pewnej chwili przecięto nagle linkę DB. Zadaniem naszym będzie wyznaczenie składowych przyspieszenia środka belki a_x i a_y, przyspieszenia kątowego belki ε oraz siły dynamicznej *N* w drugiej, nieprzeciętej lince FA, w chwili tuż po przecięciu linki DB. Tak sformułowane zadanie znajduje się w zbiorze zadań Mieszczerskiego [4], powtórzone w zbiorze Antoniuka i Kiedrzyńskiego [1]. Pewne rozwiązanie tego zadania podano w pozycjach [5, 7, 10]. Zagadnienia związane z dynamiką omawianych układów znaleźć można również w publikacjach [2, 6, 8, 9]. Metoda rozwiązania podana w [7] sprowadza się do ułożenia trzech równań równowagi kinetostatycznej i dwóch równań geometrycznych na współrzędne środka belki, które wyrażone przez dwa kąty obrotu linki FA - ψ i kąt obrotu belki dookoła punktu A oznaczony φ. W efekcie po dwukrotnym zróżniczkowaniu i wyrugowaniu kąta ψ, otrzymuje się równanie więzów, które z trzema

$$\varepsilon\,\tilde{x}=a_y,\qquad H=\tilde{x}\,\mathrm{ctg}\,\alpha-\,l\,\mathrm{ctg}\,\varphi,\qquad H=\tilde{x}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\tilde{x}\frac{a_x}{a_y},\qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a_x}{a_y},$$

$$H=H\;\;\rightarrow\;\;\tilde{x}=\frac{a_y\,l\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{a_y\,\mathrm{ctg}\,\varphi-a_x},\qquad \varepsilon\,\tilde{x}=a_y\;\;\rightarrow\;\;\underline{l\,\varepsilon\,\mathrm{ctg}\,\varphi=a_y\,\mathrm{ctg}\,\varphi-a_x}. \qquad (11)$$

$$a_x=\frac{g\cos\varphi}{4\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\varphi+\sin\varphi},\qquad a_y=\frac{2\,g\left(2+\cos 2\varphi\right)}{5+3\cos 2\varphi},$$

$$\varepsilon=\frac{6\,g\cos^2\varphi}{l\left(5+3\cos 2\varphi\right)},\qquad N=\frac{2\,m\,g\cos\varphi}{5+3\cos 2\varphi}, \qquad (12)$$

$$a_{\mathrm{C}}=\sqrt{\left(a_x\right)^2+\left(a_y\right)^2},\qquad a_{\mathrm{A}}=\frac{a_x}{\cos\varphi}.$$

$$a_x=\frac{\sqrt{3}}{13}g,\quad a_y=\frac{10}{13}g,\quad N=\frac{2\sqrt{3}}{13}mg,\quad \varepsilon=\frac{9}{13}\frac{g}{l}. \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}&\sum F_x=0 &&\rightarrow && N\sin\varphi-m\,a_x=0,\\ &\sum F_y=0 &&\rightarrow && N\cos\varphi+m\,a_y-m\,g=0, \qquad (14)\\ &\sum M_{\mathrm{O}}=0 &&\rightarrow && N\,e-J_{\mathrm{o}}\,\varepsilon=0,\end{aligned}$$

gdzie:

$$e=\left(\frac{R}{2}\mathrm{ctg}\varphi+R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\varphi=\frac{R}{2}\left(\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi\right),\qquad J_0=\frac{1}{2}\,m\,R^2.$$

$$\varepsilon\,\tilde{x}=a_y,\quad H=\tilde{x}\,\mathrm{ctg}\,\varphi-\frac{R}{2}\left(\mathrm{ctg}\varphi+\sqrt{3}\right),\quad H=\tilde{x}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\tilde{x}\frac{a_x}{a_y},\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a_x}{a_y},$$

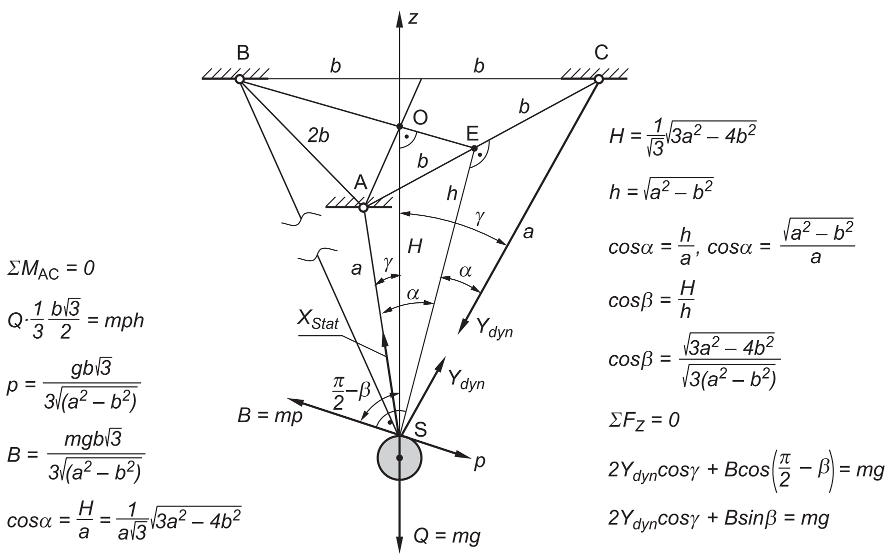
$$H=H\rightarrow\;\tilde{x}=\frac{R\left(\mathrm{ctg}\,\varphi+\sqrt{3}\right)a_y}{2\left(a_y\,\mathrm{ctg}\,\varphi-a_x\right)},\quad \varepsilon\,\tilde{x}=a_y\rightarrow\;\underline{\varepsilon\,R\left(\mathrm{ctg}\,\varphi+\sqrt{3}\right)=2\left(a_y\,\mathrm{ctg}\,\varphi-a_x\right)}. \qquad (15)$$

$$a_x=\frac{2g\cos\varphi}{\cos\varphi\left(2\sqrt{3}+3\mathrm{ctg}\varphi\right)+5\sin\varphi},\qquad a_y=g-\frac{2\,g\cos^2\varphi}{4-\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi},$$

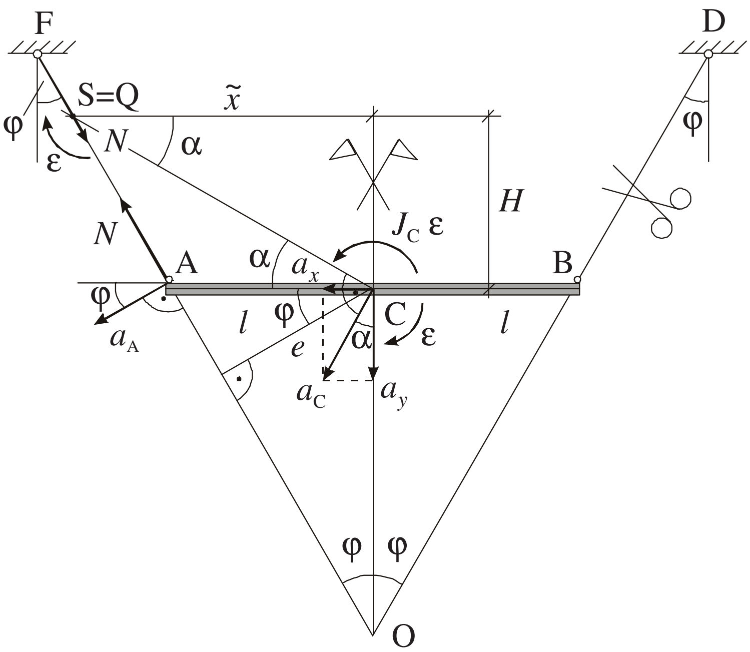
$$\varepsilon=\frac{2\,g\cos\varphi\left(\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi\right)}{a\left(4-\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi\right)},\qquad S=\frac{2\,m\,g\cos\varphi}{4-\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi}, \qquad (16)$$

$$a_{\mathrm{O}}=\sqrt{\left(a_x\right)^2+\left(a_y\right)^2},\quad a_{\mathrm{A}}=\frac{a_x}{\cos\varphi}.$$

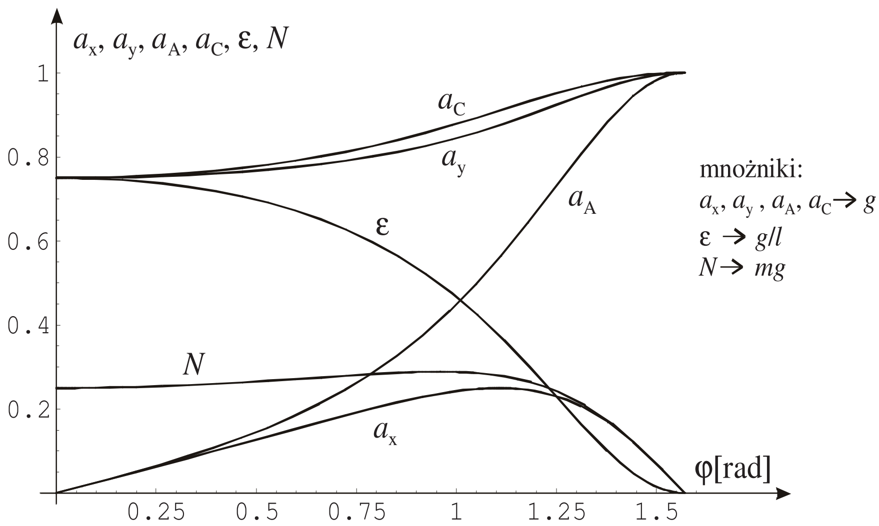
$$a_x=\frac{\sqrt{3}}{10}\,g,\quad a_y=\frac{7}{10}\,g,\quad \varepsilon=\frac{3}{5}\frac{g}{a},\quad S=\frac{1}{5}\sqrt{3}m\,g,\quad a_{\mathrm{O}}=\frac{\sqrt{13}}{5}\,g. \qquad (17)$$



***5**. Przestrzenna struktura prętowa po przecięciu linki BS*



***6**. Schemat dynamiczny rozważanej belki sztywnej*



***7**. Bezwymiarowe wykresy a_x, a_y, ε i N w funkcji kąta φ w belce sztywnej*

podstawowymi równaniami ruchu prowadzi do rozwiązania zadania.

Tutaj postąpimy nieco inaczej, bardziej ogólnie, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszeń, który w pierwszej chwili po zerwaniu pierwszej linki pokrywa się z chwilowym środkiem obrotu (prędkości). Poza tym rozwiązanie nasze będzie ważne przy dowolnej wartości kąta $\psi \in <0,\pi/2>$, w którym będzie zawarty kąt φ. Zgodnie z oznaczeniami pokazanymi na rysunku **6**, trzy równania kinetostatyki w przyjętym układzie współrzędnych przy wprowadzeniu zmiennego kąta φ zapisujemy w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad N\sin\varphi - m\,a_x = 0,\\
&\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad N\cos\varphi + m\,a_y - m\,g = 0,\\
&\sum M_C = 0 \quad \rightarrow \quad N\,e - J_C\,\varepsilon = 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

gdzie:

$e = l\cos\varphi$, $J_c = 1/3\, m\, l^2$

W pierwszych trzech równaniach (10) występują cztery niewiadome a_x, a_y, ε i N. Brakujące równanie więzów wyznaczymy z lematu Eulera wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszenia S = Q, bowiem w chwili tuż po przecięciu linki DB chwilowe prędkości belki i jej chwilowa prędkość kątowa są równe zeru. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku **1** mamy zatem równanie (11).

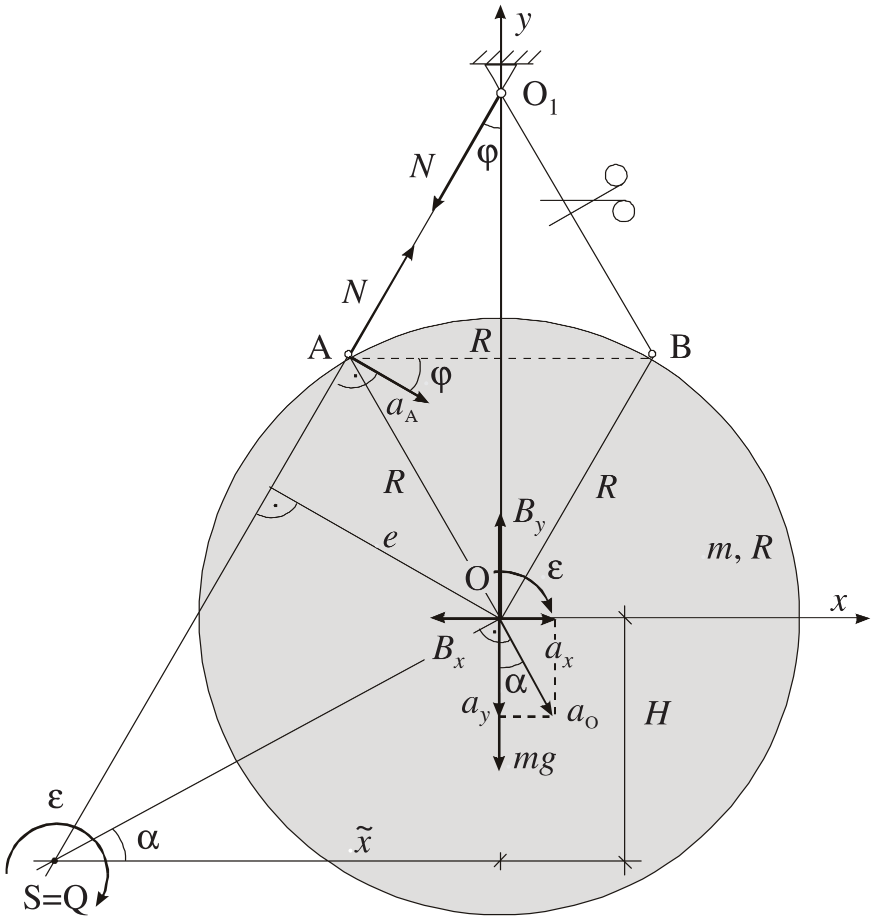
Rozwiązując układ czterech równań, w skład których wchodzą równania kinetostatyki (10) i równanie więzów opisane ostatnim ze wzorów (11), otrzymujemy odpowiedzi (12).

Na rysunku **7** pokazano w sposób graficzny odpowiedzi (12).

W przypadku $\varphi = \pi/6 = 30°$ odpowiedzi (12) redukują się do równań (13).

Tarcza kołowa podwieszona na linach

Ostatnim zadaniem jest kołowa tarcza sztywna o masie całkowitej *m* i promieniu *R*, również zawieszona



***8**. Schemat dynamiczny tarczy kołowej z układem przyspieszeń i sił w chwili tuż po przecięciu linki O_1 B*

na dwóch nierozciągliwych linkach, zbieżnych w przegubie O_1 i tworzących z pionową osią symetrii kąty *φ*. Odcinek A B niechaj będzie równy *R*. W pewnym momencie przecięto raptownie linkę O_1 B i układ stał się mechanizmem. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 8 mamy wyznaczyć cztery wielkości trzy kinematyczne i jedną dynamiczną a_x, a_y, ε i N.

Zadanie rozwiązujemy bardzo podobnie jak trzy poprzednie. Trzy równania ruchu kinetostatyki zapisujemy standardowym sposobem: (14)

Brakujące równanie więzów wyznaczamy z lematu Eulera, wykorzystując własności chwilowego środka przyspieszenia, który w chwili tuż po przecięciu linki pokrywa się z chwilowym środkiem obrotu, bowiem wszystkie prędkości w takiej chwili są równe zeru. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 8 możemy zapisać związki: (15).

Rozwiązując układ czterech równań: (14) i (15) otrzymujemy odpowiedzi (16.)

W szczególnym przypadku $\varphi = \pi/6 = 30°$ odpowiedzi (16) redukują się do (17) ◀

Materiały źródłowe

[1] Antoniuk E., Kiedrzyński A. Zadania z mechaniki ogólnej. Dynamika. PWN, Warszawa 1959.

[2] Karelitz G.B., Ormondroyd J., Garrelts J.M. Problems in mechanics. Based on the original collection of I.V. Mestchersky. The MACMILLAN Comp. 1939.

[3] Z. Mazurkiewicz, M. Żórawski, Wpływ nagłej zmiany więzów na odkształcenia ustrojów sprężystych. Archiwum Inżynierii Lądowej 1962, z. 4 s. 439-447; Effect of abrupt change of constraints on deformations of elastic systems. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech. 1962, Vol.10, No. 9, pp. 395-403.

[4] Mestchersky I.V. Collection of problems in theoretical mechanics. Ed. 36. Nauka, Moskwa 1986 (in Russian).

[5] Neuber H. Lösungen zur Aufgabensammlung Mestchersky. VEB Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin 1956.

[6] Rao S.S. Mechanical Vibrations. Pearson Education Inc., New Jersey 2004.

[7] Romicki R. Rozwiązania zadań z mechaniki zbioru W.I. Mieszczerskiego. cz. I-II. PWN, Warszawa 1971.

[8] Smart E. H. Advanced Dynamics. Vol. I-II. MacMillan, London 1951.

[9] Spiegel M.R. Theoretical Mechanics. Schaum's Outline Series. Schaum Publishing CO., New York 1967.

[10] Szcześniak W. Dynamika analityczna i MATHEMATICA. OW PW, Warszawa 2005.

[11] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych. OW PW, Warszawa 2010.

[12] Szcześniak W. Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych. OW PW, Warszawa 2013.

[13] Szcześniak W., Ataman M. Cztery wybrane zadania z dynamiki analitycznej. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions 14, OW PW, Warszawa 2006, str. 363-372.

[14] Szcześniak W., Ataman M. Instantaneous change of constraints in mechanics. 10 th International Conference TANSCOMP, Zakopane 2006, pp. 319-328.

[15] Szcześniak W., Ataman M. Sudden change of constraints in selected suspended structures. XXVII R-S-P Seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering, MATEC Web of Conferences 196, 01028 (2018).